تحلیل سازه ۱

سر فصلها:

۱. سازه ها و انواع آن و تحلیل مقدماتی سازه ها

۲. تعیین نیروهای داخلی سازه ها (تیر، قاب و خرپاها)

۳. تعیین تغییر مکانها و تغییر شکل های سازه های خمشی: ۱-روش قضیه های لنگر سطح۲- روش تیر مزدوج

٤. روش های کار و کارمایه در تحلیل سازه ها

٥. تحلیل سازه های نا معین: ۱-روش نرمی ۲– قضیه سه لنگر

٦. روش شیب و افت

۷. خط تاثیر

فصل اول: سازه و انواع آن

سازه: مجموعه ای از عضو ها می باشد که بتوانند برای انجام یک خدمت، تمام بارها و اثرهای وارد به خود را تحمل نموده و با حفظ ویژگیهای هندسی و مکانیکی نخستین خود ، این بارها و اثر ها را به محیط پیرامونی منتقل نماید.

انواع سازه ها: ۱) رشته ای ۲) نا رشته ای یا پیوسته

۱– سازه های رشته ای: در سازه های رشته ای ، سطح مقطع عضو ها در برابر طول آنها کوچک می باشد، مانند تیر، ستون، قاب، خرپا و ...

۲– نا رشته ای : صفحه ها و پوسته ها (مانند گنبد مساجد و دال ها)

انواع سازه های رشته ای: تقسیم بندی این سازه ها با توجه به نوع نیروی تحمل شده توسط آنها انجام می پذیرد:

۱- ریسمان ← کششی

۲- قوس ← فشاری

۳- خرپا ← فشار و کشش

٤- تیر ← لنگر خمشی

٥- قاب ← برش و محوری و خمشی

٦- شبکه ← لنگر پیچشی

تحلیل سازه ها:

به مجموعه عملیاتی گفته می شود که بتوان با آن مجهول های یک سازه شامل نیروهای داخلی و تغییر مکان های خارجی را محاسبه نمود، تحلیل سازه گویند.

انواع روش های تحلیل سازه:

۱- روش نرمی

۲- روش سختی

۱- روش نرمی: در روش های نرمی نیروهای داخلی سازه به عنوان مجهول اصلی می باشند.

مانند روش مقطع و مفصل در خرپا ها

۲- روش سختی: در روش های سختی، تغییر مکان های سازه به عنوان مجهول اصلی تحلیل می باشد و از فرآیند های تحلیل حساب می شوند.

نیروهای داخلی و تغییر مکانهای گرهی را می توان به سادگی به یکدیگر تبدیل نمود.

بنیادهای تحلیل سازه با روش نرمی: تحلیل سازه ها با روش نرمی بر سه پایه استوار است:

۱- تعادل

۲- تغییر شکل رابطه های نیرو

۳- رابطه های سازگاری تغییر شکل ها

۱- تعادل (رابطه های تعادل):

رابطه های مستقلی می باشند که میان نیروها و واکنش های یک سازه نوشته می شوند.

تعداد رابطه های تعادل به بعد سازه وابسته است. برای تعیین این رابطه ها کافی است تغییر مکانهای مستقل هر سازه مشخص شوند و به تعداد این تغییر مکانها می توان رابطه ی تعادل نوشت.

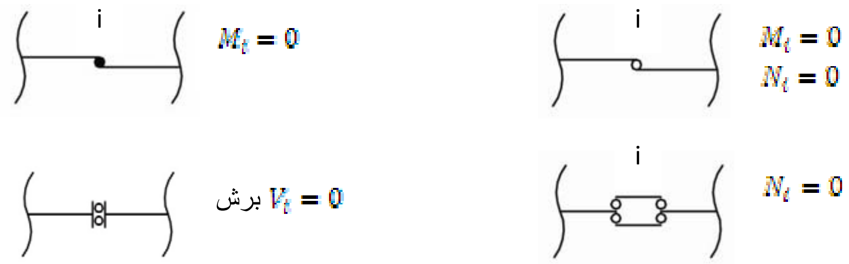
دو بعدی ← ۳ تغییر مکان مستقل ← 3رابطه تعادل

سه بعدی ← ٦ تغییر مکان مستقل ← ٦ رابطه تعادل

واکنش های تکیه گاهی: دو روش موجود است:

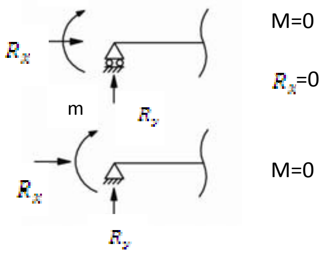
۱- برای تعیین واکنش های تکیه گاهی می توان در راستاهایی که گره تکیه گاه فاقد حرکت باشد، واکنش تکیه گاهی متناظر در آن جهت قرار داد.

رابطه های شرط نیرویی: این معادله ها افزون بر رابطه های تعادل می باشند و دلیل پیدایش آنها، ناپیوستگی ها یا شرط های اضافی در حرکت قسمت های مختلف سازه می باشد.

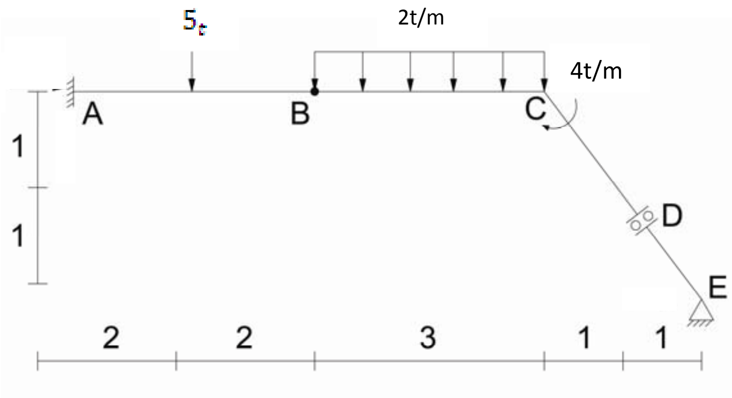


*نوشتن رابطه های شرط نیرویی، متفاوت از رابطه های تعادل می باشد.رابطه های تعادل در کل سازه نوشته می شوند، حال آنکه برای نوشتن شرط های نیرویی لازم است سازه از نقطه ای که دارای شرط نیرویی است جدا شود و در محل جدا شدگی ، نیرو های مناسب، قرار داده شوند. سپس در یکی از قسمتهای جدا شده از یک رابطه تعادل مناسب برای تعیین و محاسبه ی مجهولها استفاده گردد.

۲- باید دانست می توان واکنش های تکیه گاهی را با استفاده از شرط های نیرویی، مدل نمود. برای انجام این کار، در آغاز برای هر گره تکیه گاه سه واکنش تکیه گاهی پنداشته می شود، سپس به تعداد شرط های نیرویی اضافه گره تکیه گاه به معادله های تعادل افزوده می شود.



مثال: واکنش های شکل زیر را حساب کنید.



پایداری و نا پایداری سازه ها:

سازه ی پایدار: الف) پایداری خارجی ب) پایداری داخلی

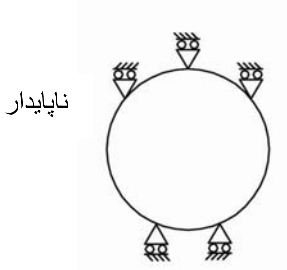
الف) پایداری خارجی : در این قسمت، سازه از نظر تعداد واکنش های تکیه گاهی و نحوه ی قرار گیری آنها بر روی سازه بررسی می شوند.حداقل تعداد واکنش های تکیه گاهی به گونه ای تعیین می شود که این واکنش های تکیه گاهی بتوانند از تمام حرکت های ممکن سازه، جلوگیری کنند.

بنابراین حداقل تعداد واکنش های تکیه گاهی به بعد سازه وابسته است.

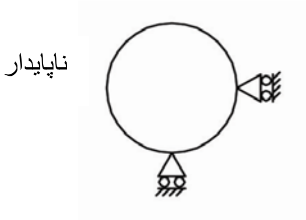
حداقل سه واکنش تکیه گاهی ← سه حرکت مستقل ← دوبعدی

حداقل شش واکنش تکیه گاهی ← شش حرکت مستقل ← سه بعدی

از سوی دیگر، برای پایداری خارجی لازم است تمام واکنش های تکیه گاهی، یکدیگر را در یک نقطه قطع نکنند و نیز تمام واکنش های تکیه گاهی، موازی یکدیگر نباشند.



با اینکه هم را قطع نمی کنند ولی موازی هستند



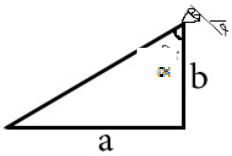
۱.تعداد واکنش ها به حداقل نرسیده

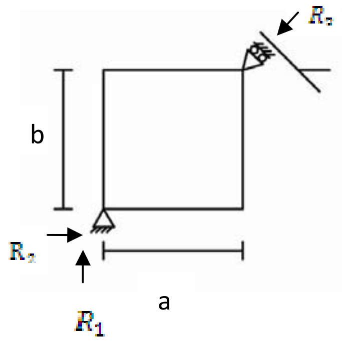
۲.یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند

در پایداری یا ناپایداری سازه های شکل زیر، برحسب مقدارهای مختلف $\propto$ بحث می کنیم

$$\tan \propto = \frac{a}{b}$$

$$\propto = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$





برای $\propto = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ سازه ناپایدار است

برای $\propto + \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ سازه پایدار است

پایداری داخلی: در پایداری داخلی، قابلیت سازه برای تحمل بارها و اثرهای وارد به آن بررسی می شود. در این حالت، رفتار سازه و پاسخ آن به بارهای وارد و نیز نحوه ی قرارگیری اعضا، مهمترین نقش را در پایداری یا ناپایداری آن ایفا می کنند.

در این حالت، شرط پایداری سازه این است که به دلیل محدود و مشخص بودن بارها و اثرهای خارجی وارد به سازه لازم است پاسخ های شامل نیرو یا تغییر مکان نیز مقدارهای محدود و مشخصی داشته باشند.پاسخ های سازه در حل یک دستگاه معادله بدست می آیند.

نخستین شرط برای وجود پاسخ های محدود و مشخص این است که دترمینان ماتریس ضریب های مجهول ها در این دستگاه معادله، مخالف صفر باشد. زیرا با صفر شدن دترمینان ماتریس ضریب ها، دستگاه(سازه) بی شمارپاسخ خواهد داشت.بنابر این ناپایدار است.

در نتیجه شرط لازم و کافی برای پایداری یک سازه، مخالف صفر شدن دترمینان ماتریس ضریب های آن می باشد. باید دانست در تحلیل های عددی، دترمینان ماتریس ضریب ها به صورت عددی حساب می شوند. در این حالت هرچه این مقدار عددی به سمت صفر نزدیک شود احتمال ناپایداری سازه بیشتر می شود. در مقابل، با بزرگ شدن دترمینان ماتریس ضریب ها، سازه پایدارتر می شود.

روش های تعیین پایداری قاب ها:

۱– روش تعداد معادله ها و تعداد مجهول ها : این روش شرط لازم برای پایداری قاب را ارائه می دهد. ولی کافی نیست به عبارتی دیگر، شرط لازم برای پایداری قاب، این است که تعداد معادله ها، همواره کوچکتر یا مساوی تعداد مجهول ها باشد.

j: تعداد گره ها

B:تعداد عضوها

R: تعداد واکنش های تکیه گاهی

C: تعداد شروط نیروی اضافی

تعداد مجهول ها ≥ تعداد مجهول ها

معادله $3j + c$

مجهول $3B + R$

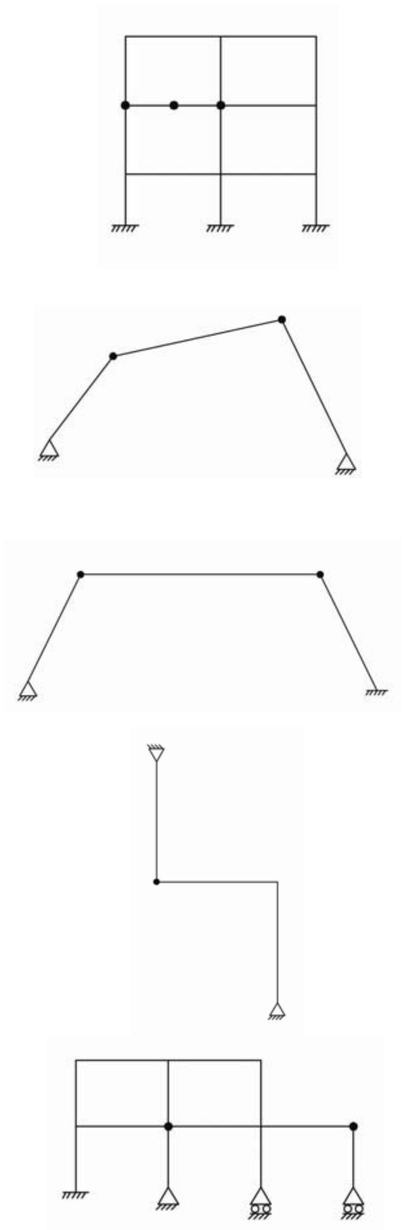
شرط کافی برای پایداری را باید با روشهای دیگر بررسی نمود.

۲– روش وارسی تغییر مکان ها و نیروهای سازه :

با وجود محدود بودن بارها، سازه ای پایدار است که پاسخ های آن نیز محدود و مشخص می باشند.

به عبارت دیگر، اگر در یک سازه تغییر مکان ها و تغییر شکل های یک یا چند قسمت از آن نامحدود یا بزرگ باشند سازه ناپایدار است. از سوی دیگر ، چنانچه رابطه های تعادل در یک یا چند قسمت از سازه، نقض شوند، سازه ناپایدار خواهد بود.

مثال:



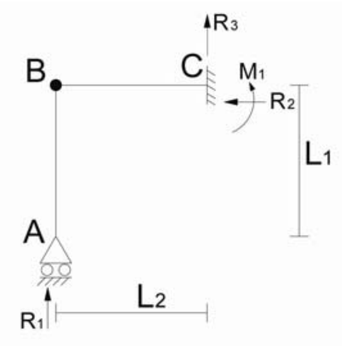
۳– روش دترمینان ماتریس ضریب ها:

در این روش نخست مجهول های سازه مشخص می شوند. حداقل تعداد مجهول های قاب برابر با تعداد واکنش های تکیه گاهی است. با وجود این، می توان شمار بیشتری از نیرو های داخلی قاب را به عنوان مجهول در نظر گرفت ، سپس با نوشتن معادله های تعادل و شرط های نیرویی، دستگاه معادله های حاکم بر رفتار قاب ، برپا می شود.

اکنون ماتریس ضریب های مجهول ها استخراج شده، دترمینان این ماتریس حساب می شوند.

مخالف صفر شدن دترمینان ماتریس ضریب های مجهول ها، نشانگر پایداری قاب خواهند بود.

در این روش از اثر بارهای خارجی صرف نظر می شود و همان ابتدا، بارهای خارجی از قاب حذف می شوند.



۱- $\varepsilon f_x = 0 \;\Rightarrow R_2 = 0$

۲- $\varepsilon f_y = 0 \;\Rightarrow\; R_1 + R_3 = 0$

۳- $\varepsilon m_c = 0 \;\Rightarrow\; R_1 \times l_2 - m_1 = 0$

٤- $\Rightarrow\; \varepsilon m_B = 0 \;\Rightarrow\; R_1 \times 0 = 0$

ناپایدار

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ L_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ M_1 \end{bmatrix} = 0$$

زیرا یک سطر یا ستون صفر وجود دارد پس سازه ناپایدار است.

روشهای تعیین پایداری خرپا

۱–روش تعداد معادله ها و مجهولها :

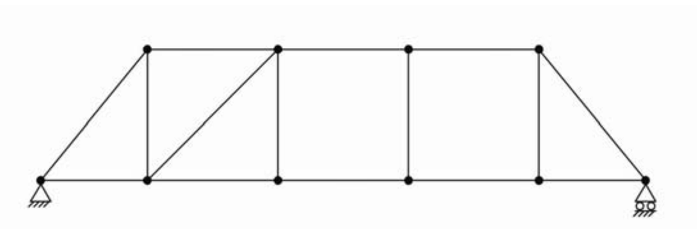
این روش، شرط لازم برای پایداری خرپا ها را ارائه می دهد، ولی کافی نیست. شرط لازم پایداری خرپاها به صورت زیر می باشد:

معادله $2J$

مجهول $B + R$

$$\Rightarrow \quad B + R \geq 2J$$

۲–روش وارسی : سه عضو خرپایی، تشکیل یک مثلث صلب را می دهند. چنانچه سازه خرپایی از گسترش قسمتهای صلب مثلثی تشکیل شده باشد، آن خرپا از نظر داخلی پایدار است. چنانچه در خرپا یک قسمت غیر مثلثی (ناصلب) وجود داشته باشد، آنگاه باید آن خرپا از نظر تغییر مکانهای ایجاد شده در آن ، کنترل شود. در صورت وجود قید های اضافی که از حرکت خرپا جلوگیری می کنند، خرپا پایدار خواهد بود. با گذاشتن تکیه گاه قرمز، از تغییر شکل های سبز رنگ جلوگیری می شود.



۳–روش آزمون بار صفر: از این روش می توان برای مشخص کردن ناپایداری خرپاها استفاده کرد. این روش بر این پایه استوار است که نیروهای داخلی یک سازه بدون بار گذاری خارجی، صفر می باشند. بنا براین اگر روی یک سازه ی فاقد بارگذاری خارجی ، یک دسته نیروی داخلی مخالف صفر بدست آید، آن سازه نا پایدار است.

در خرپاها از این روش برای مشخص کردن ناپایداری استفاده می شود. برای انجام این کار، نیروی داخلی یکی از عضوهای خرپا، مقدار *S* فرض می گردد. باید دانست، عضو انتخابی نباید از اعضاء صفر نیرویی باشد.

سپس خرپا تحت اثر نیروی عضو *S* فرض شده، تحلیل می شود و نیروهای دیگر عضوهای آن از معادله های تعادل حساب می شوند. چنانچه در پایان ، تمام نیروهای عضوها، تابعی از *S* بدست آید، خرپای مورد نظر دارای بیشمار نیروی داخلی خواهد بود. زیرا می توان هر مقدار عددی را برای *S* در نظر گرفت در نتیجه خرپا ناپایدار است.

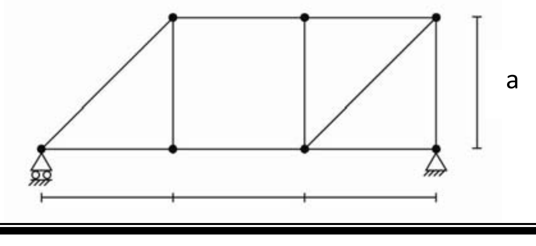
چنانچه در هنگام تحلیل ، از یکی از را بطه های تعادل ، *S=0* شد، آنگاه نمی توان از این روش در تعیین پایداری یا ناپایداری خرپا اظهار نظر کرد و باید از روش های دیگر استفاده نمود.

۴–روش دترمینان ماتریس ضرایب :

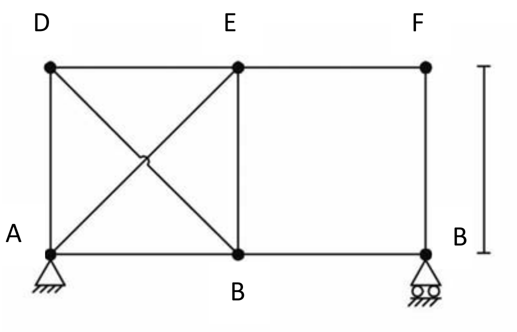
در این شیوه، نخست معادله های حاکم بر رفتار خرپا از رابطه های تعادل گرهی بدست می آیند. سپس ماتریس ضریب ها تشکیل می شود. اگر دترمینال ماتریس ضریب ها صفر گردد، خرپا ناپایدار است.

مخالف صفر شدن دترمینال ماتریس ضریبها، نشانگر پایداری خرپا است.

مثال: در پایداری یا ناپایداری خرپاهای شکل زیر، با روش های مختلف، اظهار نظر کنید.

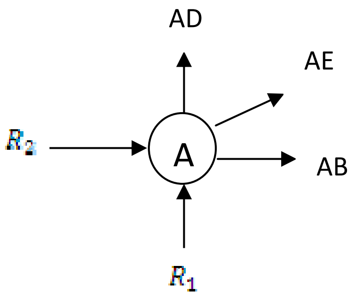


a a a

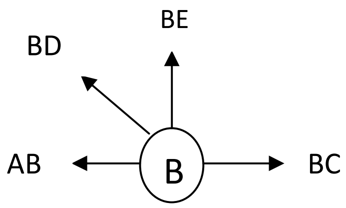


برای راحتی کار، حل شکل بالا به روش دترمینان ماتریس ضرایب در صفحه بعد نوشته شده است.

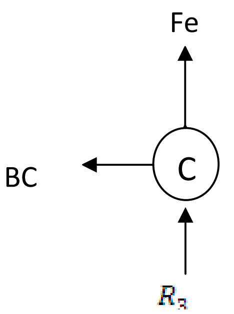
حل شکل صفحه قبل به روش دترمینان ضرایب :



$$\begin{array}{l} x: \\ y: \end{array}\begin{cases} R_2 + AB + AE\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 & 1 \\ R_1 + AD + AE\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 & 2 \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} x: \\ y: \end{array}\begin{cases} BC - AB - BD\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ BE + BD\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} x: \\ y: \end{array}\begin{cases} Bc = 0 \\ Fe + R_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & ١ & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & ٢ & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ AB \\ Bc \\ AD \\ AE \\ BD \\ BE \\ Fc \\ DE \\ EF \end{bmatrix} = 0$$

این ماتریس مساوی صفر خواهد شد.

※درجه ی نامعینی :

چنانچه در یک سازه، تعداد مجهول ها بیشتر از معادله های تعادل و شرط های نیرویی باشد، آن سازه نامعین نامیده می شود و نمی توان نیرو های سازه را تنها با استفاده از معادله های تعادل و شرط های نیرویی حساب کرد.

برای تحلیل این سازه ها ، نخستین گام، تعیین درجه نا معینی است. درجه نامعینی به صورت زیر تعریف می شود.

تعداد معادله ها – تعداد مجهول ها = درجه نامعینی(N)

درجه نامعینی را می توان از روش های زیر حساب کرد:

۱–روش تعداد معادله ها و مجهول ها :

در خرپای دو بعدی $N=B+R-2J$

قاب دو بعدی $N=3(B-J)+(R-C)$

۲–روش حلقه : هر حلقه بسته ، سه درجه نامعین است. بنابر این چنانچه یک سازه دارای L حلقه ی بسته باشد، آنگاه درجه نامعینی آن از رابطه زیر حساب می شود:

$N=3L-C-C_R$

C: شرط های نیروی اضافی C_R: شرط های نیرویی تکیه گاه ها

در این شیوه، اثر واکنش های تکیه گاهی توسط شرط های نیرویی آنها (C_R) در نظر گرفته می شوند.

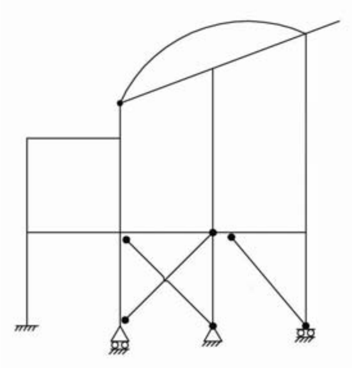
۳–روش مقطع : چنانچه در یک سازه، تعداد L حلقه بسته وجود داشته باشد آنگاه می توان با S مقطع، تمام خرپا را باز نمود. در اینصورت درجه نامعینی این سازه از رابطه زیر محاسبه می شود:

$S=L$ $\qquad$ $N=3S-C-C_R$

۴–روش درخت : در این شیوه، سازه نا معین تبدیل می شود. برای انجام این کار نخست سازه از محل های تکیه گاه ها و نیز نقاطی که دارای شرط های نیرویی می باشند (مانند مفصل) آزاد می گردد. همچنین به تعداد کافی مقطع و برش برروی سازه در نظر گرفته می شود به گونه ای که هیچ حلقه بسته ای برروی سازه باقی نماند. در هر یک از محله های جداشدگی و برش تعداد نیروهای مجهول پدید آمده قرار داده می شود. اگر F تعداد کل این نیرو ها باشد و به تعداد T زیر سازه معین (درخت) در اثر جداشدگی ها در سازه پدید آمده باشد آنگاه درجه نامعینی از رابطه زیر حساب میشود.

$N=F-3T$

مثال: درجه نامعینی سازه شکل زیر را با روش های مختلف تعیین کنید.



فصل دوم

محاسبه نیروهای داخلی سازه ها :

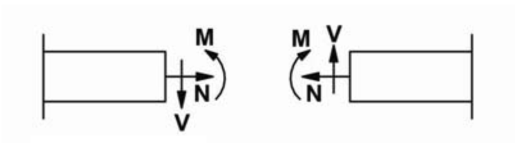
نخست لازم است نیرو های داخلی سازه ها دسته بندی شوند. این دسته بندی با توجه به اثر تغییر شکلی آنها انجام می پذیرد. بر این اساس نیروهای داخلی در یکی از دسته های زیر قرار می گیرند.

۱– نیروهای محوری : این نیرو در راستای محور عضو اثر می کند و باعث کوتاه یا بلند شدن طول عضو می شود. محور عضو خطی است که گره ابتدا را به انتهای عضو وصل می کند.

۲– نیروی برشی : این نیروی عمود بر محور عضو، اثر می کند و باعث جابجایی عمومی صفحات مقطع نسبت به یکدیگر می شود.

۳– لنگر خمشی : بردار این نیرو در صفحه ی عمود بر عضو قرار دارد باعث دوران مقاطع عضو می شود.

4– **لنگر پیچشی :**بردار لنگر پیچشی در امتداد و محور عضو است و باعث می شود. صفحه های مقطع گرد محور عضو دوران کنند. جهت های قرار دادی محاسبه ی نیرو های داخلی به صورت زیر می باشند.



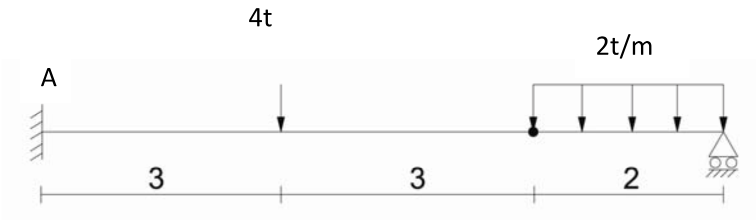
چپ به راست   راست به چپ

روش جزء به جزء یا روش روی هم گذاری :

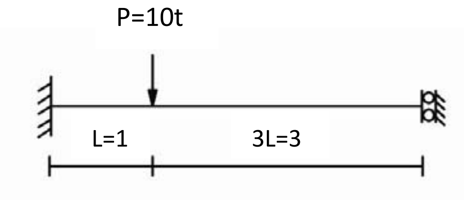
از این روش می توان برای رسم نمودارهای لنگر و برش تیرهای سرتاسری معین و نامعین استفاده کرد . کلیات روش در تیرهای معین و نا معین یکسان است. در تیرهای معین نخست واکنش ها از رابطه های تعادل حساب می شوند. سپس نمودار نیروی داخلی مربوط به هریک از واکنش ها و بارهای خارجی به صورت جداگانه رسم می گردد.

با روی هم گذاری این نمودارها نمودار نیروی داخلی تیر معین بدست می آید.

مثال: نمودار لنگر و برش تیر شکل زیر را رسم کنید.



تمرین: نمودار لنگر تیر نا معین شکل زیر را رسم کنید.



توضیح برای حل تمرین بالا

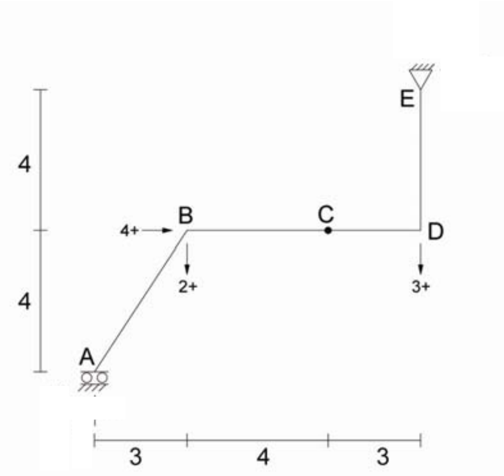
از آنجا که نیروی واکنش R (واکنش افقی تیر) اثری در لنگر ندارد. بنابراین می توان این واکنش را در تیرهای سر تا سری همواره معلوم پنداشت. در این سازه لنگر M که واکنش تکیه گاه می باشد معلوم فرض می شود و نمودار لنگر بر حسب این واکنش تکیه گاهی معلوم فرض شده بدست می آید. نخست از رابطه های تعادل، دیگر واکنش های تکیه گاهی به صورت تابعی از واکنش معلوم فرض شده بدست می آیند.

رسم نمودار های نیروهای داخلی قابها :

برای رسم نمودارهای نیروهای داخلی قابها از روش تحلیلی استفاده می شود. برای انجام این کار نخست واکنش های تکیه گاهی قاب از معادله های تعادل و شرط های نیرویی آن حساب می شود. سپس با توجه به شرایط هندسی ، بارگذاری و نیرویی قاب مقطع هایی برای محاسبه ی نیروهای داخلی قاب، شامل نیروی محوری برش و لنگر خمشی در نظر گرفته می شوند. در هریک از این مقاطع، تابع های نیروهای داخلی از رابطه های تعادل مناسب، حساب می شوند.

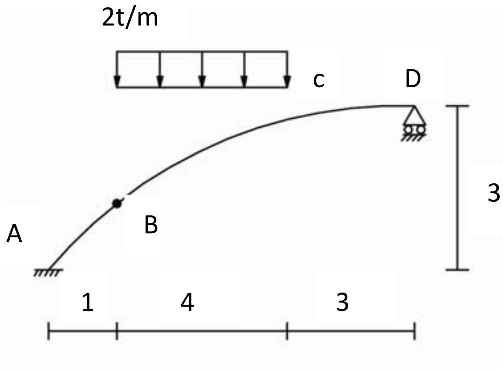
با رسم کردن این تابع ها برروی قاب نمودارهای نیروهای داخلی قاب بدست می آیند.

مثال: نمودار لنگر برش و محوری قاب شکل زیر را رسم کنید.



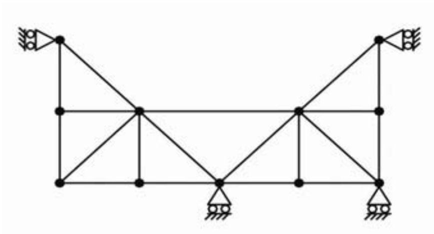
نیرو های داخلی قوسها : برای تعیین تابع های نیروهای داخلی قوس ها، نخست شکل هندسی قوس و تابع آن مشخص می گردد. سپس واکنش های تکیه گاهی از معادله های تعادل حساب می شود. اکنون با توجه به تغییر هندسه و بار گذاری قوس، قوس به تعدادی قسمت کوچکتر تقسیم می شودو در هر قسمت، تابع های نیروهای داخلی از معادله های تعادل حساب می شوند. با درج مقدارهای عددی این تابع ها در جدول، تغییرات نیروهای داخلی قوس بدست می آید.

مثال: تابع های نیرو های داخلی قوس شکل زیر را پیدا کنید؟ (قوس درجه ۲)

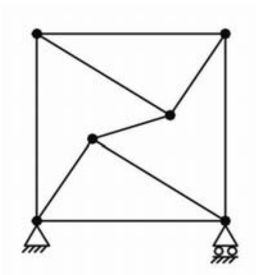


انواع خرپاها :

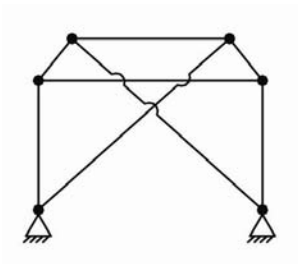
۱- **خرپای ساده :** این خرپا از کنار هم قرار گرفتن قسمت های صلب مثلثی تشکیل می شوند.



۲- **خرپای مرکب :** از اتصال دو یا چند خرپای ساده یک خرپای مرکب بدست می آید.



۳- **خرپای مختلط :** خرپایی که نتوان آن را در یکی از دسته های ساده یا مرکب جای داده مختلط است.

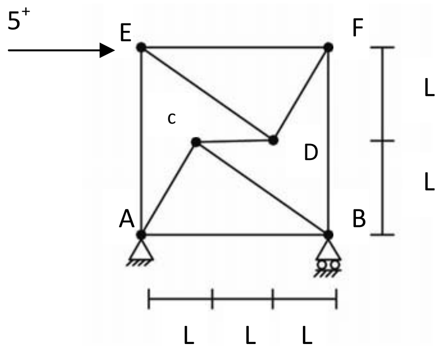


روشهای تعیین نیروهای داخلی خرپاها

۱- **روش مفصل دستی :** این روش، تنها برای خرپاهای ساده که بتوان در حداقل یکی از گره های آنها، دو مجهول وجود داشته باشد، به کار می رود. رابطه های تعادل در این گره که دارای دو نیروی مجهول است، نوشته می شود و با حل این رابطه ها، دو مجهول گره حساب می شود. این فرایند برای دیگر گره های خرپا تکرار می شود و تمام نیروهای داخلی عضوهای آن حساب می شوند.

۲- **روش نیروهای مجهول :** این روش برای تعیین نیروهای داخلی خرپاهای معین، مرکب یا مختلط به کار می رود. محاسبات این روش از یک گره خرپا که دارای سه مجهول است، آغاز می شود. یکی از مجهول ها در آن گره، مقدار معلوم X فرض می گردد و دو مجهول دیگر از رابطه های تعادل بر حسب x حساب می شوند. اکنون رابطه های تعادل در دیگر گره های خرپا نوشته می شود و نیروهای عضوهای دیگر خرپا نیز بر حسب X بدست می آیند. از آنجا که خرپای نخستین معین بوده است، مقدار X از یکی از رابطه های تعادل بدست می آید. با داشتن مقدار X، نیروهای دیگر عضوهای خرپا حساب می شود.

مثال: نیروهای داخلی خرپای شکل زیر را حساب کنید.



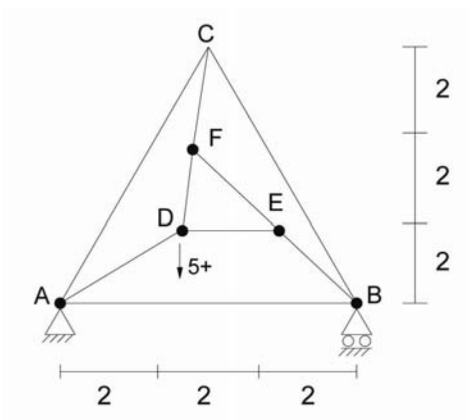
۳-**روش مقطع :** از این روش، هنگامی استفاده می شود که هدف محاسبه ی نیروهای عضوهای خاصی از خرپا می باشد. برای انجام این کار خرپا توسط یک مقطع بریده می شود، به گونه ای که در محل بریدگی بیش از سه مجهول وجود نداشته باشد و مجهول های پدید آمده یکدیگر را در یک نقطه قطع نکنند و نیز این مجهول ها موازی یکدیگر نباشند.

با استفاده از معادله تعادل لنگر، می توان مجهول های موجود در مقطع را حساب کرد.

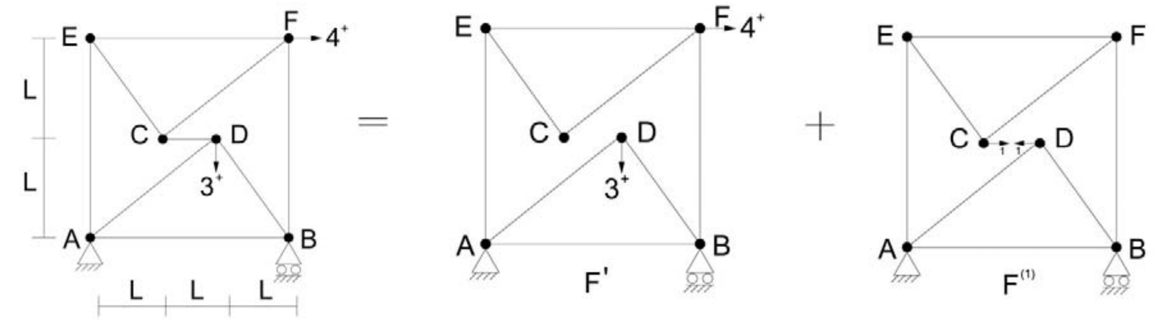
٤-**روش جداسازی :** این روش، همانند روش مقطع می باشد، با این تفاوت که در روش جداسازی، مقطع استفاده شده در خرپا، سبب جدا کردن یک بخش از خرپا می شود. قسمت جدا شده معمولاً در کل خرپا تکرار شده است. به عبارت دیگر در روش جداسازی، قسمت های تکراری توسط یک مقطع بسته از خرپا جدا می گردد.

اکنون با استفاده از رابطه های تعادل در قسمت جدا شده، نیروهای مرز جداشدگی حساب می شوند. با استفاده از این نیروها می توان دیگر نیروهای خرپا را نیز حساب کرد.

مثال: خرپای شکل زیر را با روش جداسازی تحلیل کنید.



۵-روش هنبرگ : در روش هنبرگ یا جابه جایی عضوها، از سه اصل تعادل، روی هم گذاری و نیز سازگاری نیروها استفاده می شود. برای انجام این کار، یک خرپای مرکب یا مختلط را در نظر بگیرید.



خرپای نخستین   خرپای پایه   خرپای پایه

این خرپا را نمی توان با روش مجهول معمولی تحلیل نمود. برای استفاده از روش هنبرگ یک یا چند عضو خرپا از محل های نخستین آنها جا به جا می شوند. این جا به جایی و تغییر محل عضو ها باید به گونه ای انجام شود که خرپای بدست آمده پس از جابجا کردن عضوها، پایدار باشد. خرپای بدست آمده پس از جا به جا کردن عضو ها را خرپای پایه می نامند.

اکنون با استفاده از رابطه های تعادل، خرپای پایه در اثر بارهای خارجی خرپای نخستین، تحلیل می شود و نیروهای داخلی عضوهای آن($\acute{F}$) حساب می شوند. اکنون لازم است نیروهای عضو های خرپای پایه با نیروهای عضوهای خرپای نخستین سازگار باشند. برای ایجاد این سازگاری نیرویی لازم است، نیروی عضو های اضافه شده به خرپا (عضو ها در محل های جدید) صفر گردند زیرا این عضوها در خرپای نخستین وجود ندارند. برای ایجاد این ساز گاری نیرویی لازم است،نیروی عضوهای اضافه شده به خرپا(عضوها در محل های جدید)، صفر گردند. زیرا این

عضوها در خرپای نخستین وجود ندارند. برای ایجاد این سازگاری نیرویی، یک بارگذاری یکه در محل نخستین عضو جابه جا شده قرار داده می شوند و خرپای پایه در اثر این باریکه به تنهایی تحلیل میشود. در اینصورت بردار نیروهای ($F^{(1)}$) بدست می آید.

برای نوشتن معادله ی سازگاری نیرویی و صفر نمودن نیروی عضو اضافه شده به خرپا (در اینجا عضوFD) از اصل روی هم گذاری نیروها در خرپای پایه استفاده می شود. بدین صورت که مجموع درایه ی نیروی عضو FD در اثر بار گذاری خارجی با X برابر نیروی FD در اثر بارگذاری یکه باید صفر گردد. در اینجا X نیروی عضو CD می باشد.

یعنی می توان نوشت:

$$\acute{F}_{ED} + X\,F_{ED}^{(1)} = 0$$

$X = \frac{-\acute{F}_{ED}}{F_{ED}^{(1)}}$ نیروی عضو ED

از رابطه ی یک نیروی عضو جابه جا شده ی CD حساب می شود. اکنون می توان نیروهای دیگر عضوهای خرپای نخستین را از رابطه ی زیر حساب نمود.

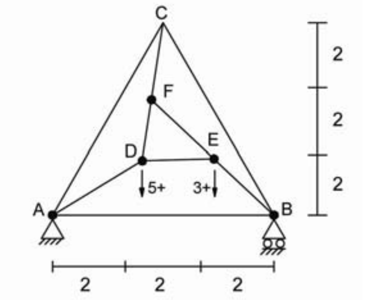
$$F=\acute{F} + x.F^{(1)} \qquad 2$$

تمرین ۱: خرپای مسئله قبل را در هریک از حالت های زیر با روش هنبرگ تحلیل کنید.

۱-جابجا نمودن عضو FC و قرار دادن آن در محل AC

۲-جابجا نمودن عضو BD و قرار دادن آن در محل AC

تمرین۲: خرپای شکل زیر را با روش هنبرگ تحلیل کنید.



فصل سوم

تغییر شکل های خمشی سازه :

تغییر شکل در مقاطع عضوهای سازه پدید می آید و عامل بوجود آورنده و آن ، نیروهای داخلی سازه می باشد.

بنابراین تغییر شکل های هر یک از نیروهای داخلی نیز مستقل از یکدیگر می باشند.

به عبارت دیگر تغییر شکل های محوری ، تغییر شکل برشی و تغییر شکل خمشی و تغییر شکل پیچشی، مستقل از یکدیگر هستند.

تغییر مکان :

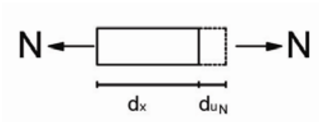
تغییر مکان در گره های سازه پدید می آید و عامل ایجاد کننده ی آن تغییر شکل های عضوهای سازه است.

به عبات دیگر جمع آثار تغییر شکل های عضوها و روی هم گذاری آنها با یکدیگر سبب تغییر مکان گره های سازه می گردد.

در ادامه انوع تغییر شکل های سازه و رابطه هایی برای محاسبه ی آنها ارائه می گردد.

۱) تغییر شکل محوری :

قطعه ای از یک عضو به طول du که تحت اثر نیروی محوری به قرار دارد را در نظر بگیرید. تغییر شکل محوری از رابطه ی زیر محاسبه خواهد شد.



$du_n = \varepsilon_n d_x$

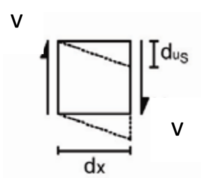
کرنش محوری $\varepsilon_n = \frac{N}{AE}$

$du_n = \frac{N}{AE} d_x$

تغییر شکل محوری عضو $u_n = \int_0^L \frac{N}{AE} d_x$

A: سطح مقطع عضو E: ضریب کشسانی L: طول عضو

۲)تغییر شکل برشی :



$du_s = \varepsilon_s d_x$

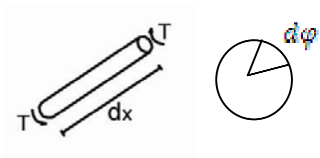
کرنش برشی $\varepsilon_s = \frac{f_s U}{GA} d_x$

f_s: ضریب شکل مقطع G: مدول برشی

$du_s = \frac{f_s U}{GA} d_x$

تغییر شکل برشی $U_s = \int_0^L \frac{f_s V}{GA} d_x$

۳)تغییر شکل پیچشی :



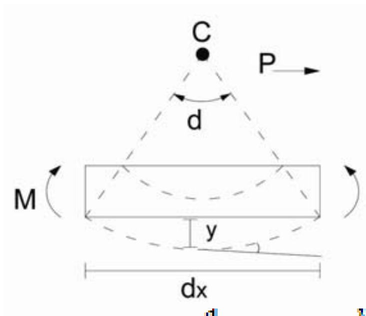
$d\varphi = \varepsilon_T \; d_x$

کرنش پیچشی $\varepsilon_T = \frac{T}{Gy}$

$$d\varphi = \frac{T}{Gy} d_x$$

تغییر شکل پیچشی $\varphi = \int_0^L \frac{T}{Gy} d_x$

۴–تغییر شکل خمشی :



$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{1}{\rho} = K = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$d_x = \rho . d\theta$

y: تابع تغییر مکان خمشی

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

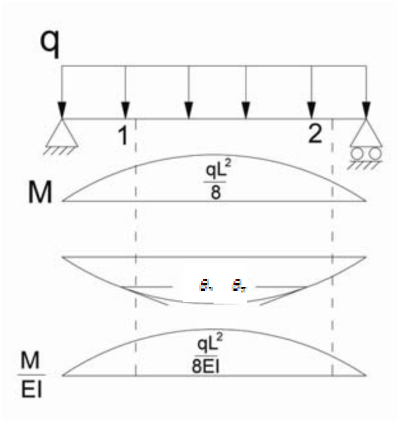
θ شیب خط مماس بر نمودار تغییر شکل خمشی

$$\frac{d}{dx}(\theta) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow \theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \Rightarrow d\theta = \frac{M}{EI}dx$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_1^2 \frac{M}{EI}dx \Rightarrow \boxed{\theta_2 - \theta_1 = \int_1^2 \frac{M}{EI}dx}$$

1



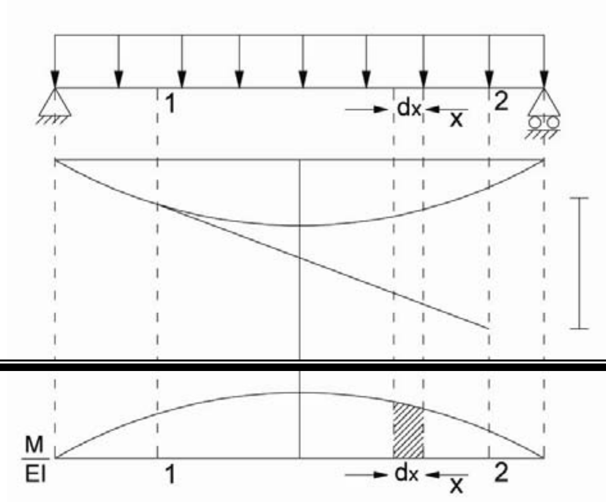
→ رابطه ی ۱) قضیه ی اول لنگر سطح را نشان می دهد. بر این اساس تغییر زاویه ی مماس بر تابع تغییر شکل خمشی سازه بین ۲ نقطه ی ۱ و ۲ برابر است با سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ بین آن دو نقطه (ناحیه هاشور خورده) باید دانست از این قضیه ، تغییر θ تغییر شیب خط مماس (θ) بدست می آید نه خود شیب خط مماس. زاویه ی θ که همان شیب خط مماس است. همواره کوچکترین زاویه ی دوران از امتداد مماس بر تابع تغییر شکل خمشی به سمت محور اولیه ی عضو (خط افق) می باشد.

در این حالت چنانچه دوران ساعتگرد انجام شود، θ مثبت و چنانچه دوران پاد ساعتگرد انجام شود θ منفی است.

قضیه ی دوم لنگر سطح :

$$d\Delta = (x + dx)d\theta = xd\theta + \underline{dxd\theta}$$

$$d\Delta = xd\theta = x\frac{M}{EI}dx$$



ار

$$\int_1^2 d\Delta = \int_1^2 x\frac{M}{EI}dx$$

$\Delta z1$

$$\boxed{\Delta_{21} = \int_1^2 x\frac{M}{EI}dx} \quad (۲)$$

رابطه ی ۲) قضیه ی دوم لنگر سطح را نشان می دهد. بر این اساس فاصله ی نقطه ی ۲ بر روی نمودار تغییر شکل خمشی تا مماس رسم شده از نقطه ۱ (Δ_{21}) برابر است با گشتاور سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ نسبت به نقطه ۲

* یادآوری : مقدار بدست آمده از قضیه ی دوم (Δ_{21}) به مفهوم تغییر شکل خمشی نیست.

*** ویژگیهای قضایای لنگر سطح :**

۱) قضیه های لنگر سطح در دامنه های پیوسته خمشی (دامنه های بدون مفصل) به کار می روند.

۲) از قضیه های لنگر سطح، مقدارهای نسبی (تغییر شیب مماس یا فاصله ی نقطه ی ۲ تا مماس نقطه ی ۱) بدست می آیند و نمی توان از آنها به صورت مستقیم ، خیز و شیب را صاف نمود.

۳) جهت قرار دادی خیز (y) ، به سمت پائین ، مثبت می باشد و به سمت بالا منفی می باشد.

*** گام های حل مسائل با قضیه های لنگر سطح :**

۱- رسم نمودار لنگر خمشی

۲- تعیین نمودار $\frac{M}{EI}$

۳- رسم نمودار تغییر شکل تقریبی خمشی از روی نمودار $\frac{M}{EI}$ و با توجه به شرایط تکیه گاهی سازه

$\frac{M}{EI} > 0$ 

$\frac{M}{EI} < 0$ 

$\frac{M}{EI} = 0$

٤- نوشتن رابطه های سازگاری میان تغییر شکل های خمشی و کمیت های بدست آمده از قضیه های لنگر سطح این رابطه ها از روی نمودار تغییر شکل تقریبی خمشی بدست می آیند.

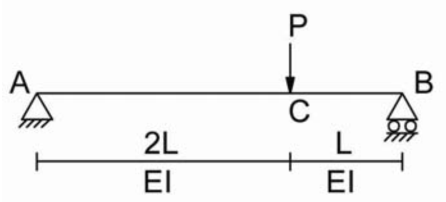
٥- حل معادله های سازگاری و تعیین مجهول ها (خیز و دوران نقاط مختلف)

* در گام چهارم از مراحل بالا رابطه سازگاری تغییر شکل با فرض کوچک بودن تغییر شکلهایسازه نوشته می شود.

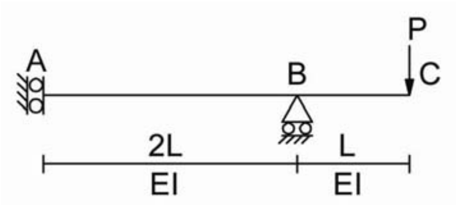
* معادله های سازگاری معمولا با رسم مماس از یک نقطه بر نمودار تغییر شکل تقریبی و استفاده از روابط مثلثاتی با فرض تغییرشکل های کوچک بدست می آید.

مثال: در تیر شکل زیر، دوران گروههای A و B و نیز خیز بیشینه را حساب کنید.

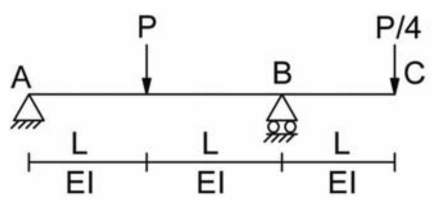
(خیز نقطه اثر بار در نقطه ی C را حساب کنید) $tan\theta \approx sin\theta \approx \theta$



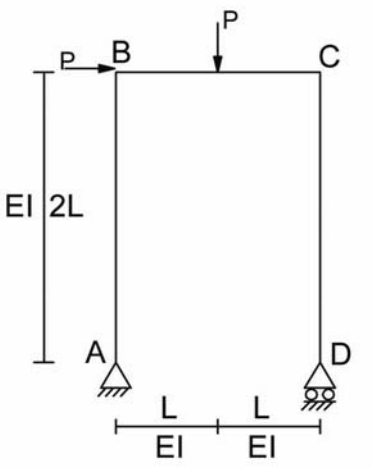
مثال : در تیر شکل زیر، دوران های نقاط B وC و نیز خیز نقطه های A وC را حساب کنید.



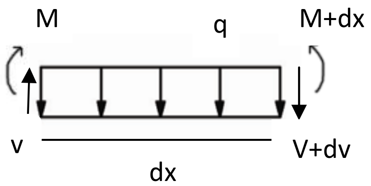
مثال : در تیر شکل زیر، دوران گره B و خیز نقطه ی C را حساب کنید.



مساله از قاب : در شکل زیر با در نظر گرفتن اثر خمشی به تنهایی و استفاده از قضیه های لنگر سطح مطلوبست محاسبه ی دوران گره های A و B و C و D و نیز تغییر مکان افقی گره D.



روش تیر مزدوج :



$$dv = q\,dx \qquad v = \int q\,dx \quad (3)$$

$$v = \frac{dx}{dx} \qquad dx = v\,dx$$

$$M = \iint q\,dx \quad (4)$$

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \quad , \quad \theta = \int \frac{M}{EI}dx \quad (1)$$

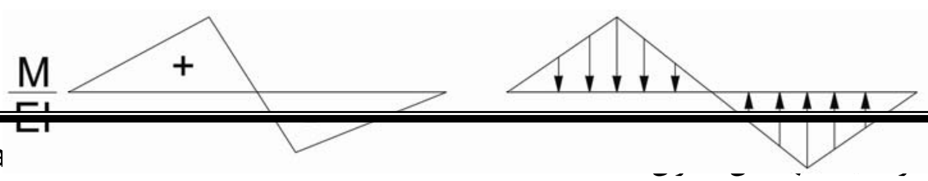
$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad , \quad dy = \theta\,dx$$

$$y = \int \theta\,dx \qquad y = \iint \frac{M}{EI}dx \quad (2)$$

مقایسه ی رابطه های ۱ و۲ با معادله های ۳ و٤ به روش تیر مزدوج منجر می گردد. به عبارت دیگر چنانچه بارگذاری یک تیر (q) با $\frac{M}{EI}$ جایگزین شود. آن گاه برش در هر مقطع تیر طبق رابطه ۱ دوران آن مقطع را نشان می دهد. از سوی دیگر دوران حالت لنگر در هر مقطع طبق رابطه ۲ خیز آن نقطه را نشان می دهد.

به تیری که بارگذاری آن توسط $\frac{M}{EI}$ جایگزین شده است، تیر مزدوج تیر اصلی گویند.

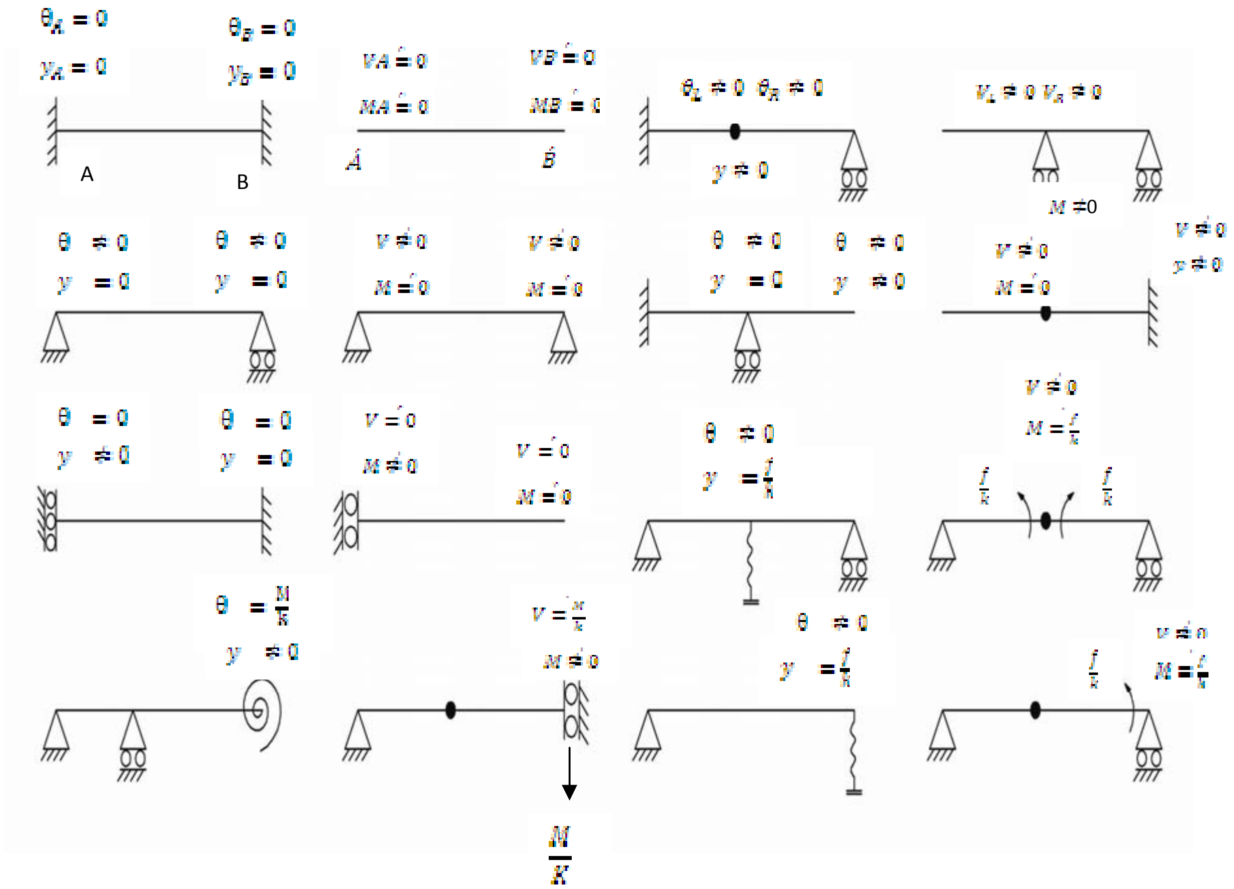
نکته: هندسه تیر مزدوج (ابعاد و اندازه های آن) کاملا مشابه و همانند هندسی تیر اصلی است. از سوی دیگر بارگذاری تیر مزدوج توسط نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی انجام می شود جهت این بارگذاری به صورت زیر تعیین می شود.



تیر اصلی　　　　　　　　　　　　　　تیر مزدوج

شرایط تکیه گاهی تیر مزدوج

شرایط تکیه گاهی تیر مزدوج از روی تغییر مکان ها و دوران های تکیه گاههای تیر اصلی بدست می آیند. به عنوان نمونه فرض گردد یکی از تکیه گاههای تیر اصلی گیر دار است. در این صورت دوران و خیز در محل تکیه گاه در تیر اصلی صفر است.



ویژگیهای روش تیر مزدوج :

۱- در این روش تنها اثر تغییر شکل های خمشی در نظر گرفته می شود.

۲- تیر مزدوج تیر اصلی همواره معین و پایدار است . معین بودن تیر مزدوج سبب می شود بتوان روش تیر مزدوج را برای تحلیل تیرهای نا معین خمشی نیز به کار برد.

به عبارت دیگر اگر تیر اصلی نا معین باشد، تیر مزدوج آن معین است و می توان مجهولها را تنها با رابطه های تعارل حساب کرد.

از سوی دیگر تیر مزدوج همواره پایدار است . چنانچه تیر مزدوج به تعداد کافی واکنش تکیه گاهی برای تأمین پایداری نداشته باشد، آنگاه شرط های پایداری آن توسط بارگذاری اعمال شده به آن (نمودار$\frac{M}{EI}$) تامین می گردد.

۳- در روش تیر مزدوج راستا های مثبت برای محاسبه ی نیروهای داخلی (لنگر و برش هر مقطع) همانند جهت های قراردادی فصل دو است. چنانچه برش در یک مقطع از تیر مزدوج مثبت شود در آن مقطع دوران پادساعتگرد انجام شده است (در تیر اصلی). از سوی دیگر مثبت شدن لنگر در هر مقطع تیر مزدوج نشانگر این است که آن مقطع در تیر اصلی به سمت پائین حرکت جا به جا شده است.

گام های حل مسائل به روش تیر مزدوج

۱- رسم نمودار لنگر تیر اصلی

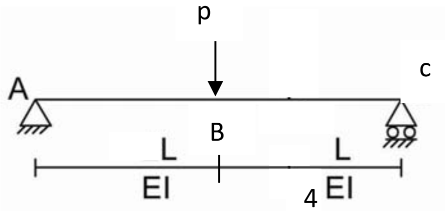
۲- مشخص کردن نمودار$\frac{M}{EI}$ تیر اصلی

۳- رسم تیر مزدوج و مشخص کردن شرایط تکیه گاهی آن با توجه به دورانها و خیز تکیه گاه های تیر اصلی

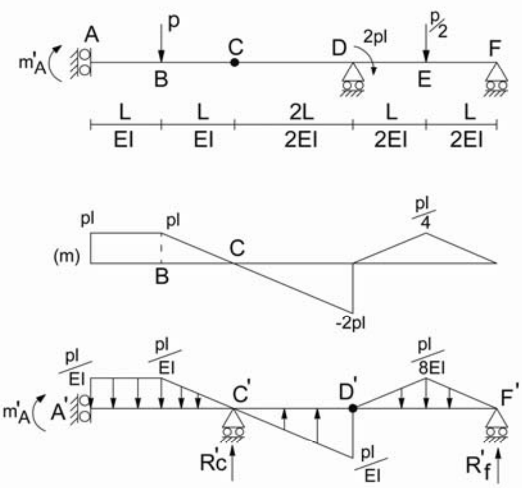
٤- قرار دادن نمودار$\frac{M}{EI}$ تیر اصلی به عنوان بار بر روی تیر مزدوج

٥- تحلیل تیر مزدوج با رابطه های تعادل و محاسبه ی برش و لنگر در هر مقطع تیر مزدوج و معادل قرار دادن آنها با دوران و خیز آن مقطع در تیر اصلی

مثال: در تیر شکل زیر با روش تیر مزدوج دوران تکیه گاه A وc و خیز گره B را حساب کنید.



به عنوان مثال، در تیر شکل زیر، داریم



$$\sum M_C = \circ \Rightarrow MA = PL$$

کل سازه $\sum M_D = \circ$

$$M_A - P\times 3L + 2PL + \frac{P}{2}\times L - R_F \times 2L = \circ$$

$$R_F = \frac{p}{4}$$

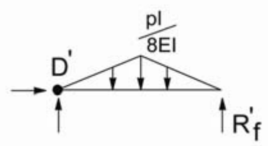
$$\sum Fy = \circ \Rightarrow R_B + R_F - P - \frac{P}{2} = \circ$$

$$R_D = \frac{5}{4}P$$

کنترل $\sum M_F = PL - P\times 5L + \frac{5}{4}P\times 2L + 2PL - \frac{P}{2}\times L = \circ$ ok

تحلیل تیر مزدوج و محاسبه ی برش و لنگر در نقاط مختلف آن

$$\sum M_{D'} = \circ$$



$$R'_F = \frac{\frac{PL}{8}\times\frac{L}{2}\times\left(L+\frac{L}{3}\right)+\frac{PL}{8EI}\times\frac{L}{2}\times\frac{2L}{3}}{2L} = \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\sum Fy = \circ \Rightarrow RC = ...$$

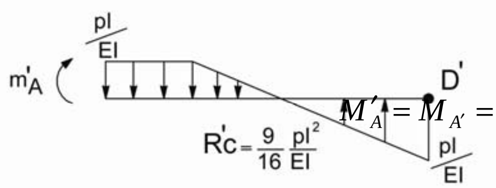
$$R'C = \frac{PL}{EI}\times L + \frac{PL}{EI}\times\frac{L}{2} - \frac{PL}{EI}\times\frac{2L}{2} + \frac{PL}{8EI}\times L - \frac{PL^2}{16EI}$$

$$R'C = \frac{9}{16}\times\frac{PL^2}{EI}$$

$$\sum M_{D'} = \circ$$

$$M'_A = \frac{PL}{EI}\times L\times\left(3L+\frac{L}{2}\right)+\frac{PL}{EI}\times\frac{L}{2}\times\left(2L+\frac{2L}{3}\right)-\frac{Z}{16}\times\frac{PL^2}{EI}\times 2L-\frac{PL}{EI}\times\frac{2L}{2}\times\frac{2L}{3}$$

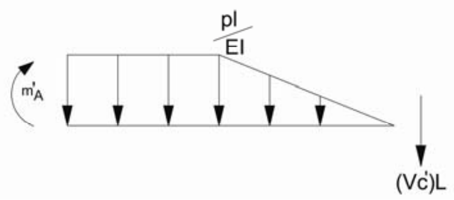
$$\Rightarrow M'_A = \frac{73}{24}\times\frac{PL^3}{EI}$$



$$M'_A = M_{A'} = \frac{73}{24}\times\frac{PL^3}{EI}$$

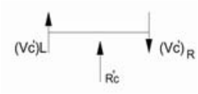
$$y_A = M_{A'} = \frac{73}{24}\times\frac{PL^3}{EI}\downarrow$$

$$(\theta c)_l = (V\acute{c})_l = -\frac{PL}{EI}\times L - \frac{PL}{EI}\times\frac{L}{2}$$

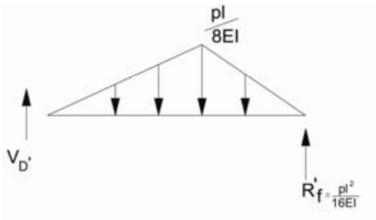


$$(\theta c)_l = -\frac{3}{2}\frac{PL^2}{EI}$$ پاد ساعتگرد

$$(\theta c)_R = (V\acute{c})_R = R\acute{c} + (V\acute{c})_L = \frac{9}{16}\frac{PL^2}{EI} + \left(-\frac{3}{2}\frac{PL^2}{EI}\right) = -\frac{15}{16}\frac{PL^2}{EI}$$ پاد ساعتگرد



$$\theta d = V_D' = \frac{PL}{8EI} \times L - \frac{PL^2}{16EI} = \frac{PL^2}{16EI}$$ ساعتگرد



روش تیر مزدوج برای تحلیل تیرهای نامعین خمشی:

در قسمت قبل در روش تیر مزدوج برای تعیین تغییر مکان ها و دوران های تیرهای معین خمشی به کار رفت.

از آنجا که تیر مزدوج تیر اصلی، همواره معین است می توان از روش تیر مزدوج برای تحلیل تیرهای نامعین خمشی و محاسبه ی نمودارهای لنگر و برش آنها استفاده نمود.

برای انجام این کار، گام هایی به شرح زیر اجرا می شوند:

۱- تعیین درجه ی نامعینی تیر (N): این درجه ی نامعینی تنها با در نظر گرفتن اثرهای خمشی محاسبه می شود.

۲- آزاد کردن N واکنش تکیه گاهی از تیر نامعین و قرار دادن واکنش های تکیه گاهی مناسب در محل های تکیه گاه های رها شده، به گونه ای که یک تیر معین و پایدار بدست آید.

۳- استفاده از روش تیر مزدوج در تیر معین شده و محاسبه ی تغییر مکانهای تکیه گاه های رها شده.

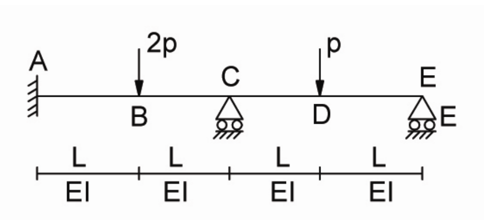
در این مرحله، نمودار لنگر تیر معین شده با استفاده از روش جزء به جزء و نیز به کارگیری اصل روی هم گذاری، رسم می شود.

٤- سازگار نمودن تغییر مکان های محل های تکیه گاه های رها شده با تغییر مکانهای واقعی آنها در روی تیر اصلی و بدست آوردن یک دستگاه N معادله، N مجصول.

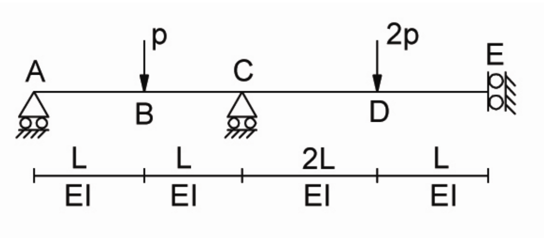
٥- حل دستگاه N معادله، N مجصول و محاسبه ی واکنش های تکیه گاهی رها شده.

٦- رسم نمودار لنگر خمشی نامعین و برشی آن.

مثال : نمودار لنگر تیر شکل زیر را با روش تیر مزدوج رسم کنید.



مثال :



تمرین ۱: در مثال اول (تیر ۲ درجه نامعین) با آزاد کردن لنگر تکیه گاه A و نیز واکنش عمودی تکیه گاه E، مساله را مجدداً حل کنید.

تمرین ۲: در مثال دوم (تیر یک درجه نامعین) با آزاد کردن واکنش تکیه گاه C، مساله را دوباره حل کنید.

فصل چهارم : روش کار و کارمایه برای تحلیل سازه ها

حاصلضرب داخلی بردار نیرو در بردار تغییر مکان ، کار نامیده می شود. کار کمیتی عددی است که ویژگی های بردارهای نیرو و تغییر مکان سازه را همزمان در خود نگهداری می کند. روش های کار و کارمایه به دلیل عددی بودن محاسبات، کاربرد فراوانی در تحلیل سازه ها دارد. نخستین گام، طبقه بندی انواع کارها در سازه می باشد.

در سازه ها، می توان کار را به شیوه های مختلف دسته بندی نمود.

این دسته بندی ها به صورت زیر می باشند:

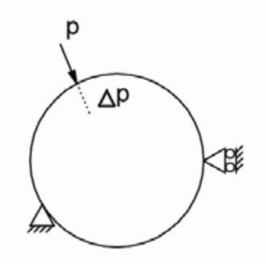
۱- **کار خارجی:** کار انجام شده توسط بارهای خارجی وارد به سازه، کار خارجی نامیده می شود.

۲- **کار داخلی:** کار انجام شده بوسیله نیروهای داخلی مقطع عضوهای سازه مانند نیروی محوری، برش، لنگر خمشی، کار داخلی نام دارد. از سوی دیگر می توان کار انجام شده در سازه ها را به ۲ دسته ی حقیقی و ساختگی جدا نمود. چنانچه هر ۲ عامل پدید آورنده ی کار (نیرو و تغییر مکان) حقیقی باشند، کار حقیقی است.

اگر یکی از عامل های نیرو یا تغییر مکان، ساختگی باشد، آن کار ساختگی خواهد بود.

در ادامه، کار نیروهای خارجی محاسبه می شود.

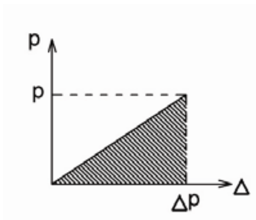
۱- کار بارهای خارجی:



$$w_E=\int p d\Delta \quad (*)$$

کار خارجی
(External)

محاسبه ی کار، از رابطه ی (*) به چگونگی تغییرات P بر حسب Δ وابسته است. با فرض رفتار خطی برای سازه، آنگاه کار از رابطه ی زیر حساب می شود.



کار خارجی = سطح زیر نمودار = $\frac{1}{2}p.\Delta p$

$$W_E = \frac{P}{2} \times \Delta P = \frac{\text{نیرو}}{2} \times \text{ر مکان متناظر نیرو} \quad (۱)$$

در صورت وجود چندین بار خارجی در سازه، کار خارجی کل سازه از مجموع کارهای خارجی یک یک نیروها بدست می آید.

۲–محاسبه ی کار نیروهای داخلی:

در اثر بارهای خارجی وارد به سازه، درون اعضای سازه نیروی داخلی پدید می اید. هر یک از این نیروهای داخلی، دارای تغییر شکل های مستقل از یکدیگر می باشند. بنابراین هر نیروی داخلی در تغییر شکل وابسته به آن نیرو کار انجام می دهد. در نتیجه کار داخلی در مقاطع عضوهای سازه و به تفکیک نیروی داخلی انجام می شود. در این صورت می توان کار داخلی هر عضو را به صورت مجموع کارهای نیروهای محوری، برش، لنگر خمشی، لنگر ، فرض کرد. کار هر یک از نیروهای داخلی نیز مشابه کار بارهای خارجی و با فرض رفتار کسشان خطی برای سازه به صورت زیر محاسبه می شود:

$$W_I = W_N + W_U + W_M + W_T$$

$$dw_N = \frac{N}{Z} + du_N = \frac{N}{Z} \times \frac{N}{AE} dx = \frac{N^2}{ZAE} dx$$

$$w_N = \int_{\circ}^{L} \frac{N^2}{ZAE} dx$$

$$dw_v = \frac{V}{2} \times du_s = \frac{V}{2} \times \frac{fsV}{GA} dx = \frac{FsV^2}{2GA} dx$$

$$w_U = \int_{\circ}^{L} \frac{F_s V^2}{2GA} dx$$

$$dw_M = \frac{M}{2} \times d\theta = \frac{M}{2} \times \frac{M}{EI} dx = \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$w_M = \int_{\circ}^{L} \frac{M^z}{2EI} dx$$

$$w_T = \int_{\circ}^{L} \frac{T^2}{2UJ} dx$$

کار داخلی در کل سازه:

$$w_I = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\circ}^{Li} \frac{Ni^2}{2AiEi} dx + \int_{\circ}^{Li} \frac{F_s \quad V_i^2}{2G_i A_i} dx + \int_{\circ}^{Li} \frac{Mi^2}{2E_i I_i} dx + \int_{\circ}^{Li} \frac{Ti^2}{2G_i J_i} dx \right]$$

n : تعداد عضوهای سازه

رابطه ی بالا کار داخلی کل سازه را نشان می دهد. با توجه به عددی بودن کمیت کار میتوان اثر نیروهای داخلی مختلف را در محاسبات وارد یا از آنها چشم پوشی کرد. به عنوان نمونه چنانچه تنها اثر خمش در تحلیل یک سازه مورد نیاز باشد، تنها کافی است در محاسبه ی کار داخلی، تنها کار لنگرهای خمشی مقاطع عضوهای سازه در نظر گرفته شوند و نیازی به وارد کردن جملات مربوط به نیروی محوری، برش و لنگر پیچشی نیست.

با این شیوه می توان اثرهای مختلف را همزمان در محاسبات وارد کرد.

به عنوان نمونه، اگر هدف، در نظر گرفتن همزمان اثرهای محوری و لنگر خمشی در تحلیل یک سازه باشد، آنگاه لازم است در محاسبه ی کار داخلی، جمله های مربوط به نیروهای محوری و و لنگر خمشی محاسبه شوند و از اثر دیگر جمله ها، صرف نظر شود.

روش کار و کارمایه در تحلیل سازه ها :

در این قسمت، ٤ شیوه برای محاسبه ی تغییر مکان ها و نیروهای داخلی سازه ها با استفاده از کمیت کار و کارمایه ارائه می شود.

۱- **روش کار حقیقی:** یک سازه که تحت اثر بارگذاری خارجی قرار دارد را در نظر بگیرید. بارهای خارجی وارد به سازه، در تغییر مکان های متناظر آن بارها، کار خارجی انجام می دهد. از سوی دیگر، بارهای خارجی وارد به سازه به سبب ایجاد نیروهای داخلی در مقاطع عضوهای سازه می شوند. هر یک از این نیروهای داخلی نیز در تغییر شکل های متناظر آن نیروها کار انجام می دهند که مجموع این کارها به عنوان کار داخلی شناخته می شوند.

چنانچه هیچگونه اتلاف کارمایه در سازه پدید نیاید آنگاه می توان کار انجام شده توسط بارهای خارجی را با کار انجام شده توسط نیروهای داخلی مقاطع عضوهای سازه، برابر پنداشت. یعنی:

$$w_E = w_I$$

در رابطه ی ۱، w_E، کار خارجی و w_I کار داخلی در کل سازه می باشد (۱)

این رابطه یک معادله ی عددی است بنابراین می توان از آن، تنها یک کمیت مجهول را محاسبه کرد. برای انجام این کار فرض گردد یک سازه معین که تنها دارای یک بارگذاری خارجی در یک نقطه از آن می باشد، موجود است.

معین بودن سازه، سبب می گردد بتوان نیروهای داخلی آن را از رابطه ی تعادل و شرط های نیروهای اضافی، حساب کرد. بنابراین پس از محاسبه ی نیروهای داخلی می توان کار داخلی هر عضو و در نتیجه کار داخلی کل سازه را محاسبه کرد.(w_I).

از سوی دیگر، چون سازه تنها دارای یک بارگذاری خارجی است، کار خارجی تنها توسط این بار در تغییر مکان متناظر بار انجام می شود، یعنی می توان نوشت:

$$w_E = \frac{p_i}{2} \times D_i$$

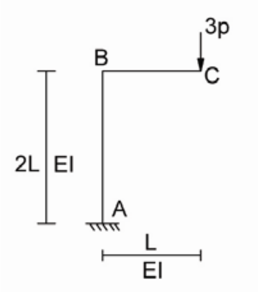
$p_i =$ بار خارجی در گره i

$D_i =$ تغییر مکان نقطه ی i در راستای بار p_i

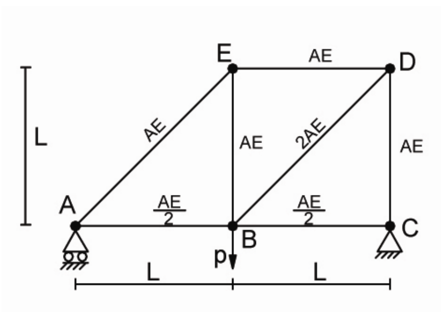
$$\frac{p_i}{2} D_i = w_I \Rightarrow D_i = \frac{2w_I}{p_i} \qquad (۲)$$

از رابطه ی ۲: تغییر مکان نقطه اثر بار خارجی در راستای اعمال بار خارجی بدست می آید. بنابراین این روش که با نام روش کار حقیقی شناخته می شود، تنها برای سازه ی معین که فقط تحت اثر یک بار خارجی باشند، به کار می روند و می توان با این روش، تغییر مکان نقطه اثر بار در راستای آن را محاسبه کرد.

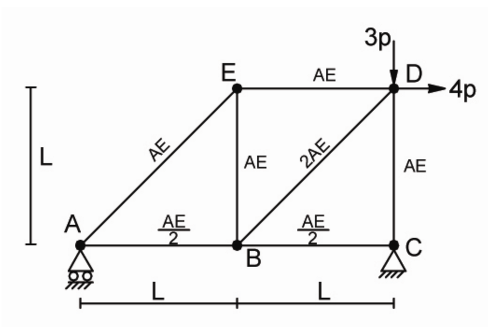
مثال: با در نظر گرفتن اثر خمش، به تنهایی تغییر مکان عمودی گره c از قاب شکل زیر را حساب کنید.



مثال: در خرپای شکل زیر، تغییر مکان عمودی گره B را حساب کنید.



تمرین: خرپای مسئله قبل رابا فرض بارگذاری نشان داده شده در شکل زیر، مجدداًتحلیل کرده، تغییر مکان های افقی و عمودی گره D را با روش کار تحقیقی بدست آورید.



۲- **روش کار ساختگی:** یک دستگاه سازه ای که تحت اثر ۲ دسته بارگذاری قرار دارد را در نظر بگیرید. بارگذاری اول، حقیقی و بار گذاری دوم ساختگی است. هر یک از این بارگذاری ها به صورت جداگانه به سازه وارد می شوند و سبب ایجاد نیروی داخلی و تغییر شکل در مقاطع عضوهای سازه می شوند.

اگر بارگذاری ساختگی با F_j^v(بار ساختگی در گره j) ، تغییر مکان های سازه در اثر بارگذاری حقیقی، با D_j^R(تغییر مکان نقطه ی j در اثر بارگذاری حقیقی)، نیروهای داخلی در اثر بارگذاری ساختگی با S^v (نیروهای داخلی عضوهای سازه در اثر بارگذاری ساختگی) و تغییر شکل های مقاطع عضوهای سازه در اثر بارگذاری حقیقی با U^R (تغییر شکل های مقطع های عضوهای سازه در اثر بارگذاری حقیقی) باشند، آنگاه می توان نشان داد، رابطه ی زیر دراین سازه برقرار است:

$$\sum_{j=1}^{m} F_j^V D_j^R = \sum S^V U^R \qquad (۱)$$

رابطه ی(۱)، قضیه ی کار ساختگی را نشان می دهد. بر این اساس، در هر سازه ی کشسان خطی، کار انجام شده توسط بارهای ساختگی F_j^V در تغییر مکان های متناظر آنها که ناشی از بارگذاری حقیقی سازه می باشند D_j^Rبرابر است با کار انجام شده توسط نیروهای داخلی ساختگی $\left(S^V\right)$ در تغییر شکل های متناظر آنها که ناشی از بارگذاری حقیقی اند، $\left(U^R\right)$ سمت راست رابطه ی (۱) را می توان بصورت زیر حساب کرد:

$$\sum s^V u^R = \sum \left[\int_0^{Li} \frac{N^V N^R}{(AE)_i} dx + \int_0^{Li} \frac{F_s V_i^V V_i^R}{(GA)_i} dx + \int_0^{Li} \frac{M_i^V M_i^R}{(EI)_i} dx + \int_0^{Li} \frac{T_i^V T_i^R}{(GJ)_i} dx \right]$$

N^R: نیروی محوری در اثر بارهای حقیقی

V^R: نیروی برشی در اثر بارهای حقیقی

M^R: لنگر خمشی در اثر بارهای حقیقی

T^R: لنگر پیچشی در اثر بارهای حقیقی

N^V: نیروی محوری عضو در اثر بارهای ساختگی

V^V: نیروی برشی عضو در اثر بارهای ساختگی

M^V: لنگر خمشی عضو در اثر بارهای ساختگی

T^V : لنگر پیچشی عضو در اثر بارهای ساختگی

روشن است رابطه ی اصل کارساختگی (رابطه ۱) نیز به یک معادله ی عددی منجر می گردد. بنابراین از این معادله تنها می توان یک مجهول را محاسبه کرد.

در ادامه، کاربرد این روش، تحت عنوان روش باریکه بررسی می شود.

روش باریکه:

این روش بر مبنای اصل کار ساختگی می باشد و در این شیوه از رابطه ی ۱ برای تحلیل سازه و بدست آوردن تغییر مکان های گره های آن استفاده می شود.

برای انجام این کار فرض گردد بارگذاری ساختگی تنها دارای یک بار باشد $(M=1)$

به عبارت دیگر، تعداد بارهای ساختگی وارد به سازه، یک می باشد. همچنین فرض شود مقدار این بار ساختگی نیز یکه باشد. در این صورت رابطه ی اصل کار ساختگی به شکل زیر تغییر می کند.

$$\left| \begin{array}{l} x=1 \\ F_j^V=1 \end{array} \right. \Rightarrow 1\times D_j^R=\sum S^V\times U^R$$

$$D_j^R=\sum S^V\times U^R \qquad (۲)$$

در این رابطه، D_j^R، تغییر مکان نقطه اثر باریکه (j) در اثر بارگذاری حقیقی سازه می باشد. بنابراین می توان این تغییر مکان را از رابطه ی زیر محاسبه کرد:

تمام
عضو ها

$$D_j^R=\sum_{i=1}\left[\int_{\circ}^{Li}\frac{N_i^V\times\ \ N_i^R}{(AE)_i}dx+\int_{\circ}^{Li}\frac{F_s\times\ \ V_i^V\times\ \ V_i^R}{(GA)_i}dx+\int_{\circ}^{Li}\frac{M_i^V\times\ \ M_i^R}{(EI)_i}dx+\int_{\circ}^{Li}\frac{T_i^V\times}{(Gj}\right. \quad (۳)$$

N^R: نیروی محوری در اثر بارهای حقیقی

V^R: نیروی برشی در اثر بارهای حقیقی

M^R: لنگر خمشی در اثر بارهای حقیقی

T^R: لنگر پیچشی در اثر بارهای حقیقی

N^V: نیروی محوری عضو در اثر باریکه ی وارد به سازه

V^V: نیروی برشی عضو در اثر باریکه ی وارد به سازه

M^V: لنگر خمشی عضو در اثر باریکه ی وارد به سازه

T^V : لنگر پیچشی عضو در اثر باریکه ی وارد به سازه

رابطه ی ۳: روش باریکه را نشان می دهد کاربرد این روش تنها در سازه های معین است و می توان با استفاده از این روش، تغییر مکان یا دوران هر گره از سازه که دارای بارگذاری کلی و اثرهای مختلف مانند نشست تکیه گاهی، خطا در نصب و ... باشد، را محاسبه نمود.

گام های انجام این روش به صورت زیر می باشند:

۱- تحلیل سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی وارد به آن و محاسبه ی تابع های نیروهای داخلی عضوهای آن با توجه به اثرهای پنداشتی. (T^R, M^R, V^R, N^R)

۲- حذف بارهای حقیقی از سازه و اعمال بار یکه در گره و راستایی که هدف محاسبه ی تغییر مکان آن گره در راستای مورد نظر می باشد.

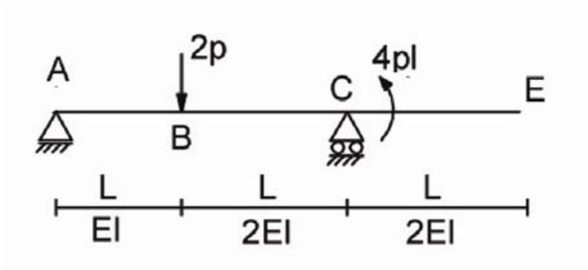
چنانچه هدف، محاسبه ی دوران یک گره باشد، آنگاه یک لنگر یکه به آن گره اعمال می شود.

۳- تحلیل سازه در اثر باریکه / لنگر یکه ی اعمال شده به آن و محاسبه ی تابع های نیروهای داخلی ساختگی با توجه به اثرهای پنداشتی (N^V , U^V , M^V , T^V)

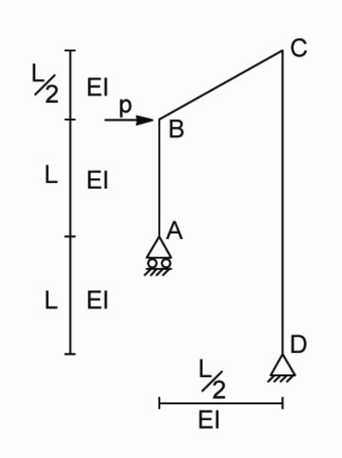
٤- محاسبه ی تغییر مکان / دوران نقطه اثر باریکه/ لنگریکه در گره ی مورد نظر از رابطه ی (۳).

مثال: در تیر شکل زیر، تغییر مکان عمودی و دوران گره E را با روش باریکه حساب کنید.

(تنها اثر خمش را در نظر بگیرید) .



مثال: در قاب شکل زیر، با در نظر گرفتن مشخصات تکیه گاهی و بارگذاری خارجی، مطلوبست محاسبه ی تغییر مکان افقی گره C و دوران تکیه گاه A . (تنها اثر خمش را در نظر بگیرید).

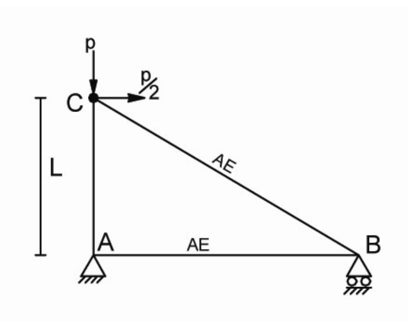

C
L/2
EI
p
B
L
EI
A
L
EI
D
L/2
EI

نکته: مبدأ محاسبه ی نیروهای داخلی و نیز راستای مثبت برای محاسبه ی نیروهای داخلی ، باید در سازه های حقیقی و ساختگی، یکسان انتخاب شود.

اثر نشست های تکیه گاهی در سمت چپ رابطه ی کار ساختگی وارد می شود. برای انجام این کار، کار ساختگی انجام شده توسط هر یک از نشست های تکیه گاهی که از نوع تغییر مکان حقیقی اند. در اثر بارگذاری ساختگی، محاسبه می شود. این کار با حاصلضرب هر نشست در واکنش تکیه گاهی متناظر آن نشست در اثر بارساختگی (باریکه) انجام می شود.

تمرین: در قاب شکل قبل تغییر مکان افقی تکیه گاه D را با روش باریکه بیابید.

مثال: در خرپای شکل زیر، با روش باریکه، تغییر مکان افقی تکیه گاه B و نیز تغییر مکان افقی وسط عضو BC را حساب کنید.



در سازه های خرپایی، نمی توان نیروها را به عضوهای خرپا وارد نمود. چنانچه هدف، محاسبه ی تغییر مکان نقطه ای از عضوهای سازه باشد (مانند وسط عضو BC) آنگاه بار در موقعیت مورد نظر به یک تیر ساده وارد می شود که دو گره ابتدا و انتهای عضو، نقش تکیه گاه های آن تیر را بازی می کنند. در این صورت واکنش های این تیر ساده به گره های ابتدا و انتهای عضو، اعمال می شود و خرپا در اثر این واکنش ها تحلیل می شود.

۳. روش کار مایه ی کرنشی:

این روش در طبقه بندی فرآیندهای سختی تحلیل سازه ها، قرار دارد. به عبارت دیگر، روش کارمایه ی کرنشی متعلق به خانواده ی روش های سختی می باشد. دراین شیوه ها (روش های سختی) مجهول اصلی در هر سازه، تغییر مکان ها و دوران های گره های آن می باشد. برای مشخص کردن این تغییر مکان ها و دوران ها از مفهوم درجه ی آزادی بر روی هر سازه استفاده می شود.

درجه ی آزادی سازه:

درجه آزادی هر سازه عبارتست از تعداد تغییر مکان ها یا دوران های مستقل گرهی که بتوان با داشتن آنها در هر لحظه، موقعیت تغییر شکل یافته ی سازه را تعیین نمود.

درجه های آزادی سازه در گره های آن سازه تعریف می شود.

تعداد و نوع درجه های آزادی هر سازه به بعد و رفتار آن سازه وابسته است.

درجه ی آزادی کل سازه، از مجموع درجه های آزادی گره های سازه بدست می آیند.

تعداد و نوع درجه های آزادی در هر گره به رفتار و بعد آن سازه وابسته است.

در ادامه، درجه های آزادی گرهی برای خرپا و قاب بدست می آیند.

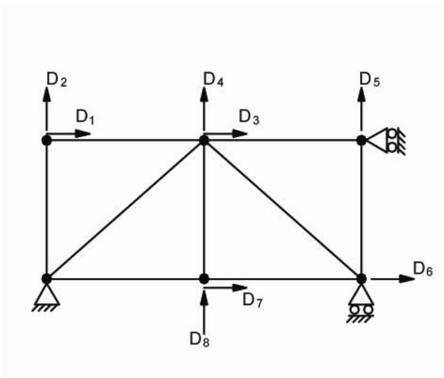
هر گره خرپای دو بعدی در حالت کلی، دارای ۲ درجه ی آزادی است. (دو انتقال، یکی در راستای x و دیگری در راستای y)

از سوی دیگر هر گره قاب دو بعدی، دارای ۳ درجه ی آزادی است. (یک تغییر مکان در راستای x، یک تغییر مکان در راستای y و یک دوران، حول محور z)

پس از مشخص کردن درجه های آزادی گرهی، این درجه های آزادی، نام گذاری می شوند.

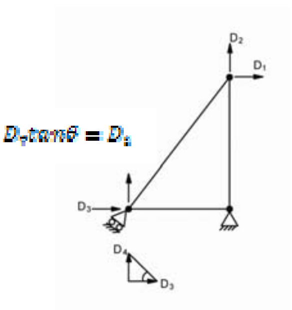
به طور معمول برای نام گذاری درجه های آزادی، از اعداد استفاده می شود.

مثلاًبرای خرپای شکل زیر داریم:



پس این سازه، سازه ایست که 8 درجه آزادی دارد.

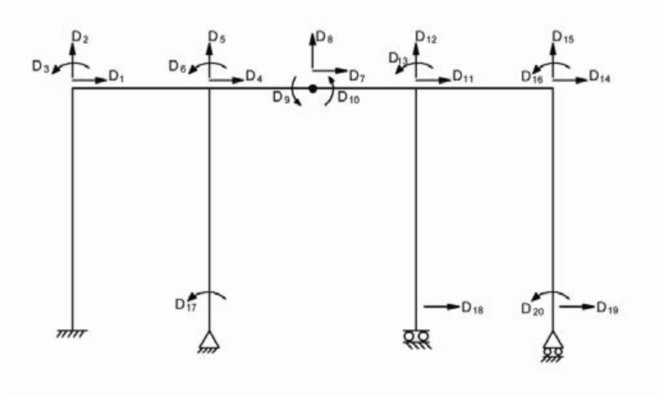
و همینطور برای شکل زیر داریم:



$$tan\theta = \frac{D_4}{D_3} \Rightarrow D_4 = D_3\, tan\theta$$

پس سازه ی شکل روبرو، ۳ درجه آزادی دارد.

و همینطور در قاب شکل زیر داریم:



پس سازه های شکل روبرو، ۲۰درجه آزادی دارد.

در شیوه های سطحی، تغییر مکان های درجه های آزادی، حساب می شوند.

روش کارمایه ی کرنشی:

چنانچه فرض گردد، بارهای خارجی تنها در گره های سازه، وارد شوند، آنگاه این بارهای خارجی، در تغییر مکان ها یا دوران های درجه های آزادی سازه کار انجام می دهند.

مقدار این کار خارجی، برای یک سازه که دارای «n » درجه ی آزادی باشد، از رابطه ی زیر حساب می شود:

$$W_E = \sum_{i=1}^{n} P_i D_i$$

P_i: بار خارجی در راستای درجه ی آزادی i ام.

D_i : تغییر مکان درجه آزادی i ام.

از سوی دیگر، بارهای خارجی سبب ایجاد نیروهای داخلی در مقاطع عضوهای سازه می شوند که این نیروها سبب ایجاد تنش و در نتیجه، کرنش در مقاطع عضوهای سازه می شود. به عبارت دیگر،

کارمایه ی لازم برای ایجاد کرنش درون مقاطع عضوهای سازه، با نام کارمایه ی کرنشی (U) نامیده می شود.

چنانچه در سازه، هیچگونه اتلافی وجود نداشته باشد، آنگاه می توان کار مایه ی کرنشی را با کار بارهای خارجی برابر پنداشت. یعنی،

$$U = W_E$$

رابطه سازی روش کارمایه ی کرنشی:

برای بدست آوردن رابطه روش کارمایه ی کرنشی، یک سازه که دارای n درجه ی آزادی باشد را در نظر بگیرید. فرض گردد، تمام درجه های آزادی این سازه بسته شده اند و تنها درجه ی آزادی i ام باز است.

اگر این درجه آزادی که بار خارجی متناظر آن Pi می باشد، به اندازه ی dD_i، نمو داشته باشد، آنگاه، نمو کار خارجی در اثر نمو درجه آزادی i ام، از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$(1) \qquad dw_E = P_i dD_i \quad \text{نمو کار خارجي در اثر نمو درجه آزادی } i \text{ام}$$

dD_i: نمو تغییر مکان درجه آزادی i ام

اگر فرض گردد، تابع کار مایه ی کرنشی سازه، به صورت یک تابع از تغییر مکان های درجه های آزادی آن سازه، رابطه سازی شده است، یعنی داریم:

$$U = u(D_1, D_2, \dots, D_n) \quad \text{کارمایه کرنشي}$$

با این فرض، می توان نمو تابع کار مایه ی کرنشی را بر حسب نموهای درجه های آزادی سازه نوشت:

$$du = \frac{\partial u}{\partial D_1} \times dD_1 + \frac{\partial u}{\partial D_2} + dD_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial D_i} \times dD_i + \cdots + \frac{\partial u}{\partial D_n} \times dD_n$$

از آنجا که تمام درجه های آزادی سازه، بسته فرض شده اند، تنها درجه آزادی i ام به اندازه ی dD_i نمو دارد. بنابراین نمو کارمایه یی کرنشی از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$du = \frac{\partial u}{\partial D_i} dD_i \qquad (2)$$

با چشم پوشی از اتلاف کارمایه، درون سازه می توان نمو کارمایه ی کرنشی و نمو کار خارجی در اثر نمو درجه آزادی i ام با یکدیگر برابر پنداشت. یعنی:

$$du = dw_E$$

$$\frac{\partial u}{\partial D_i} dD_i = P_i dD_i$$

$$d_i \neq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial D_i} = P_i \qquad i = 1,2,3,\ldots n \qquad (3)$$

رابطه ی (3)، قضیه ی کارمایه ی کرنشی را نشان می دهد. بر این اساس، در هر سازه، مشتق تابع کارمایه ی کرنشی، نسبت به تغییر مکان درجه آزادیi ام برابر است با بار خارجی وارد به سازه در راستای آن درجه آزادی.

این رابطه را می توان برای تمام درجه های آزادی سازه نوشت. در این صورت در سازه ای که دارای n درجه ی آزادی است، n معادله بدست می آید که در این رابطه معادله ها، تغییر مکان های

درجه های آزادی (D_i ها) مجهول اند. با حل این دستگاه n معادله، n مجهول، می توان n تغییر مکان درجه های آزادی سازه را حساب کرد.

این روش را می توان در سازه های کشسان، مومسان، خطی و ناخطی به کار برد.

- همچنین معینی و نامعینی نیز، اثری در انجام روش ندارد.

روش کارمایه کرنشی در سازه های نامعین ساده تر از ساده های معین انجام می شود. زیرا در حالت کلی درجات آزادی یک سازه نامعین کمتر از مشابه همسان سازه هنگامی که معین باشد است.

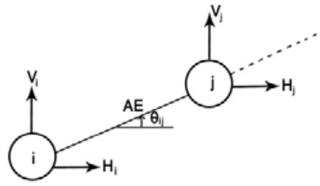
به عبارت دیگر تعداد معادله های بدست آمده کمتر می باشد و دستگاه معادلات حاصل از رابطه ۳ دارای تعداد کمتری مجهول است و می توان آن را به سادگی حل نمود.

برای استفاده از رابطه ۳ باید تابع کارمایه کرنشی (u) به صورت تابعی از تغییر مکانهای درجات آزادی سازه نوشته شود. در ادامه رابطه های تابع کارمایه کرنشی برای عضوهای خرپایی و قابی نوشته می شود.

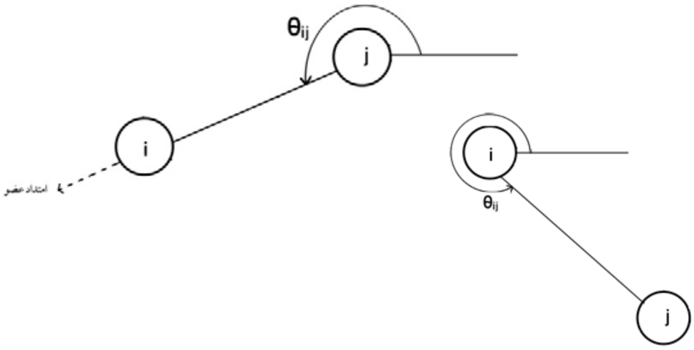
عضوهای خرپای :

θ_{ij} : زاویه ای که از امتداد زاویه x است

زاویه دوران پاد ساعت گرد . از راستای مثبت محور x ها تا محور عضو i-j



$0 < \theta_{ij} < 360$



i: گره ابتدایی عضو

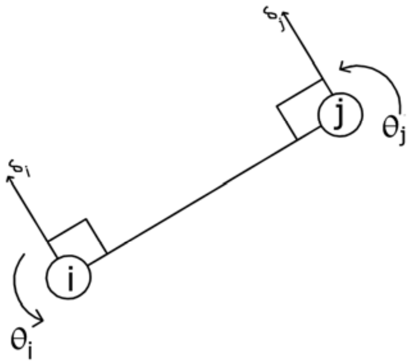
J: گره انتهایی عضو

L_{ij}: طول عضو i,j

$$u_{ij} = \frac{AE}{2L_{ij}}\left[(H_j - H_i)\cos\theta_{ij} + (V_j - V_i)\sin\theta_{ij}\right]^2$$ کارمایه ی کرنشی عضو خرپای ij

$$N_{ij} = \frac{AE}{L_{ij}}\left[(H_j - H_i)\cos\theta_{ij} + (V_j - V_i)\sin\theta_{ij}\right]$$ نیروی عضو ij

عضو قابی با اثرهای خمش و برش:

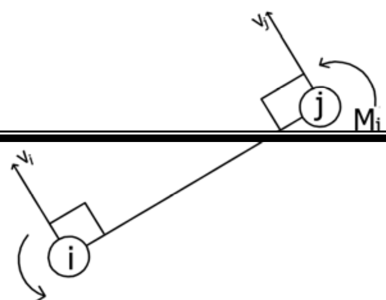


θ_i: دوران گره i (پادساعتگرد +)

θ_j: دوران گره j (ساعتگرد −)

در اینجا درجه آزادی برشی δ عمود بر محور عضو و به سمت بالا می باشد.

$$U_{ij} = \frac{2EI}{L_{ij}}\left[\theta_i^2 + \theta_j^2 + \theta_i\theta_j + \frac{3}{L_{ij}}(\theta_i + \theta_j)(\delta_i - \delta_j) + \frac{3}{L_{ij}^2}(\delta_i - \delta_j)^2\right]$$



$$M_i = \frac{2EI}{L_{ij}}\left[2\theta_i + \theta_j - \frac{3}{L_{ij}}(\delta_i - \delta_j)\right]$$

$$M_j = \frac{2EI}{L_{ij}}\left[\theta_i + 2\theta_j - \frac{3}{L_{ij}}(\delta_i - \delta_j)\right]$$

ابتدا θ و δ را حساب می کنیم

$$V_j = -\frac{M_i + M_j}{L_{ij}}$$

$$V_i = \frac{M_i + M_j}{L_{ij}}$$

گام ها ی حل مسئله به روش کارمایه کرنشی :

١- مشخص کردن و نام گذاری درجه های آزادی و گره ای با توجه به رفتار سازه و اثر های مورد نظر

٢- نوشتن تابع های کارمایه های کرنشی یکایک عضوهای سازه از رابطه های موجود.

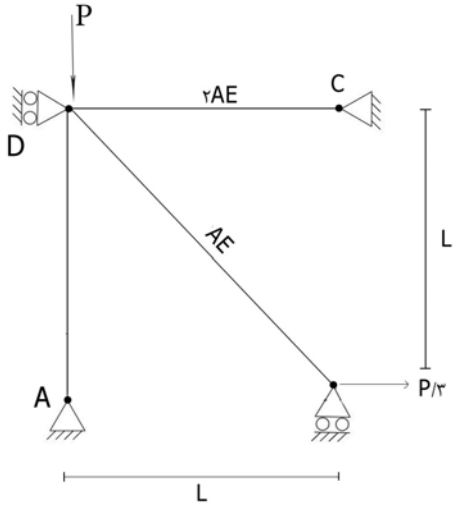
٣- تشکیل تابع کارمایه کرنشی کل سازه از مجموع تابع های کارمایه های کرنشی عضوهای هم

٤- استفاده از رابطه قضیه کارمایه کرنشی (رابطه ٣) و تشکیل یک دستگاه معادله

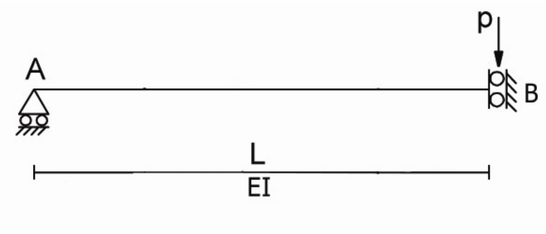
٥- حل دستگاه معادلات بدست آمده از قسمت ٤ و محاسبه تغییر مکانهای درجه های آزادی سازه

٦- محاسبه نیروهای داخلی عضوهای سازه از رابطه های موجود

مثال : نیروهای خرپای شکل زیر را از روش کارمایه کرنشی حساب کنید.

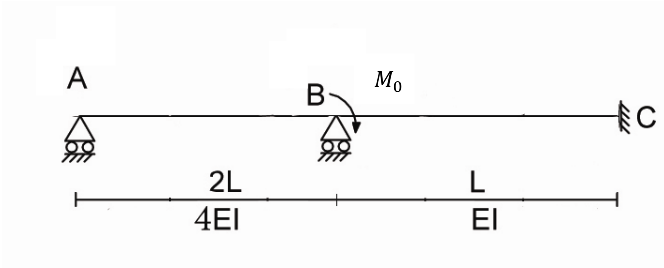


مثال : نمودار لنگر شکل زیر را رسم کنید.


p
A
B
L
EI

مثال : نمودار لنگر تیر شکل زیر را رسم کنید.

با روش کارمایه کرنشی (تنها اثر خمش موثر است)



تمرین :نمودار لنگر تیر شکل زیر را با روش کارمایه کرنشی رسم کنید.

(مسئله را در دو حالت،یکی اثر خمش به تنهایی و دیگری اثر خمش و برش حل کنید)

روش کارمایه ی متمم:

این روش برای تحلیل سازه های نامعین استفاده می شود و در دسته بندی روش های نرمی تحلیل سازه ها جای دارد. در این شیوه نخست تابع کارمایه ی متمم تعریف می شود. کارمایه ی متمم که با u^* نشان داده می شود، عبارتست از کارمایه ی داخلی سازه که بر حسب نیروهای مجهول آن سازه (نیروهای قیدهای نامعینی) نوشته می شوند. پس از نوشتن تابع کارمایه ی متمم که در آن، N مجهول وجود دارد، (N نشانگر درجه ی نامعینی سازه است) برآیندی مشابه روش کارمایه ی کرنشی، انجام می شود. در نتیجه رابطه ی زیر بدست می آید.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \Delta_i \qquad i = 1,2,\dots,N \qquad (1)$$

در اینجا x_i نشانگر نیروی قید نامعینی i ام سازه و Δ_i تغییر مکان متناظر با آن قید نامعینی می باشد. به طور معمول تغییر مکان های قیدهای نامعینی صفرمی باشند. مگر زمانی که قید نامعینی دارای نشست یا خطا در نصب باشد.

رابطه ی (1) با نام قضیه ی کارمایه ی متمم شناخته می شود. بر این اساس در هر سازه، مشتق تابع کارمایه ی متمم (u^*) نسبت به نیروی قید نامعینی i ام (x_i) برابر است با تغییر مکان متناظر با آن قید نامعینی. این رابطه به یک دستگاه N معادله منجر می گردد که از آن می توان N مجهول نیروهای قیدهای نامعینی را حساب کرد، سپس با استفاده از رابطه های تعادل، دیگر نیروهای سازه، حساب می شوند.

کارمایه ی متمم، فاقد مفهوم فیزیکی می باشد و تنها از شیوه های ریاضی بیان می شود. بنابراین در حالت کلی، رابطه سازی کارمایه ی متمم، دشوار است. برای ساده شدن کار، یک حالت خاص در سازه ها فرض می گردد و آن حالت، همان رفتار کشسان خطی است. در سازه های کشسان خطی، تابع کارمایه ی کرنشی و تابع کارمایه ی متمم با یکدیگر برابرند. در نتیجه می توان نوشت: $u^* = u$

بنابراین رابطه ی قضیه ی کارمایه ی متمم، به صورت زیر نوشته می شود:

$$(1) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\partial u}{\partial x_i} = \Delta_i \qquad i = 1,2,\ldots,N \qquad (2)$$

رابطه ی ۲ قضیه ی دوم کاستلیانو را نشان می دهد. بر این اساس در هر سازه ی کشسان خطی مشتق تابع کارمایه ی کرنشی نسبت به نیروی قید نامعینی i ام برابر است با تغییر مکان متناظر با آن قید نامعینی.

رابطه ی (2) (قضیه ی دوم کاستلیانو) تنها برای سازه های کشسان خطی به کار می روند. برای استفاده از این رابطه لازم است تابع کارمایه ی کرنشی بر حسب نیروهای عضوها، رابطه سازی

شود. این کار برای عضوهای خرپایی و عضو قابی با اثر خمش به تنهایی انجام شده است و نتایج زیر بدست آمده است:

$$u_{ij} = \frac{N_{ij}^2 L}{2AE}$$ عضو خرپایی

$$u_{ij} = \frac{L}{4EI}(M_i^2 + M_j^2 - M_i M_j)$$ عضو قابی با اثر خمش به تنهایی

گام های حل مسئله به روش کارمایه متمم:

۱- مشخص کردن درجه های نامعینی سازه

۲- فرض N نیرو از نیروهای سازه به عنوان نیروهای قیدهای نامعینی

۳- استفاده از رابطه های تعادل و محاسبه ی نیروهای عضوهای سازه بر حسب تابعی از نیروهای قیدهای نامعینی

٤- نوشتن تابع کارمایه ی متمم هر یک از عضوها

٥- تشکیل تابع کارمایه ی متمم کل سازه، از مجموع تابع های کارمایه های عضوها.

٦- استفاده از رابطه ی (2) و تشکیل یک دستگاه N معادله

۷- حل دستگاه بدست آمده ازمرحله ی 6 و محاسبه ی نیروهای قیدهای نامعینی

۸- محاسبه ی دیگر نیروهای عضوهای سازه از معادله های تعادل

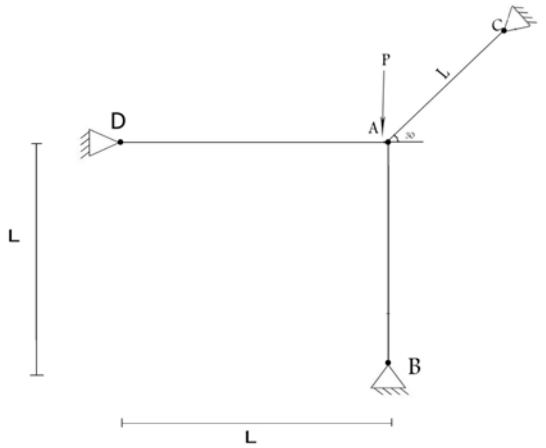
مثال: خرپای شکل زیر را با روش کارمایه ی متمم، تحلیل کنید.

این خرپا را در 2 حالت تحلیل کنید:

الف – تمام تکیه گاه ها بدون نشست باشند.

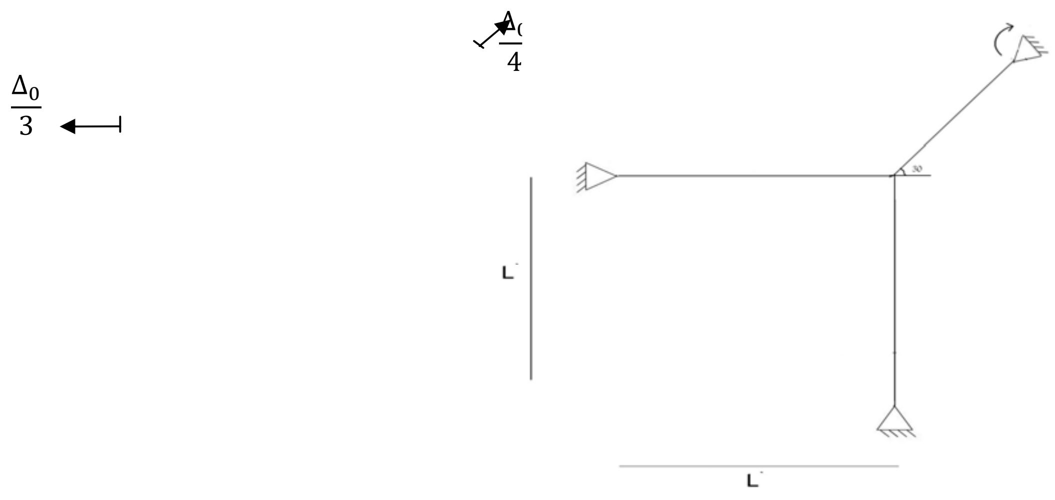
ب – تکیه گاهB دارای نشست به اندازه ی Δ به سمت پایین باشد.

(رفتار خرپا کشسان خطی است)



P
L
D
A
30
C
L
B
L

تمرین: در خرپای شکل زیر که رفتار آن کشان خطی و 9°درجه نامعین است نیروهای عضوهای را در اثر بارگذاری و نشست های تکیه گاهی داده شده در تکیه گاه های C و D حساب کنید.



روش نرمی برای تحلیل سازه های نامعین

این روش را می توان برای تحلیل تمام سازه های نامعین با اثرهای مختلف مانند تیر، قاب، خرپا و شبکه به کار برد. در این روش، از اصل های سازگاری تغییر مکان ها و اصل روی هم گذاری تغییر مکانها استفاده می شود. برای انجام این کار نخست درجه ی نامعینی سازه (N) بدست می آید.

سپس N قید تغییر مکان / دوران از سازه آزاد شده، به گونه ای که سازه بدست آمده در این مرحله معین باشد.

به سازه ی معین بدست آمده پس از رها سازی قیدهای تغییر مکان / دوران، سازه ی پایه گفته می شود. باید دانست، می توان هر قید تغییر مکان / دوران سازه نخستین را آزاد نمود. مشروط به اینکه سازه ی پایه پایدار باشد.

اکنون سازه ی پایه، تحت اثر بارهای خارجی سازه ی نخستین تحلیل شده و تغییر مکان ها / دوران های محل قیدهای رها شده حساب می شوند.

این تغییر مکان ها / دوران ها، با نماد $\{\Delta'\}_{n\times1}$ نشان داده می شوند.

Δ'_i: تغییر مکان / دوران قید رها شده ی i در سازه ی پایه در اثر بارهای خارجی سازه ی نخستین $i=1,2,.....,N$

باید دانست، متداولترین و ساده ترین روش محاسبه ی بردار تغییر مکان های Δ'، روش باریکه می باشد. اکنون به ترتیب، باریکه در محل یکایک قیدهای رها شده، قرار داده می شود. (در سازه ی پایه و با حذف بارهای خارجی) و تغییر مکان / دوران در محل تمام قیدهای آزاد شده

محاسبه می شوند. این کار، برای تمام قیدهای رها شده تکرار می شود. در پایان این مرحله ماتریس نرمی $[\sigma]_{N\times M}$ حساب می شود.

هر درایه از این ماتریس به صورت زیر تعریف می گردد.

δ_{ij} :تغییر مکان دوران محل قد رها شده ی i ام هنگامی که باریکه / لنگر یکه درمحل قید رها شده ی j ام از سازه ی پایه اعمال شود.

$i, j = 1,2,....., N$

باید دانست تغییر مکان / دوران های موجود در ماتریس نرمی δ در اثر باریکه / لنگر یکه اعمال شده در محل قید های رها شده می باشند.

حال آنکه در سازه ی نخستین و در محل قیدهای اولیه ی آن، نیروهای مجهول وجود داشته اند.

اگر نیروهای موجود در محل های قیدهای رها شده ی سازه ی نخستین با بردار $\{x\}_{N\times 1}$ نشان داده شوند، لازم است تغییر مکان / دوران های ماتریس نرمی δ ، x برابر شود.

مجموع این تغییر مکان ها با تغییر مکان های محل قیدهای رها شده در سازه ی پایه در اثر بارگذاری خارجی (Δ') باید با تغییر مکان های محل قیدهای رها شده در سازه ی نخستین $\{\Delta\}_{n\times 1}$ برابر باشند. به عبارت دیگر، می توان نوشت:

$$\{\Delta\}_{N\times 1} = \{\Delta'\}_{N\times 1} + \{\delta\}_{N\times N} \times \{X\}_{N\times 1} \qquad (1)$$

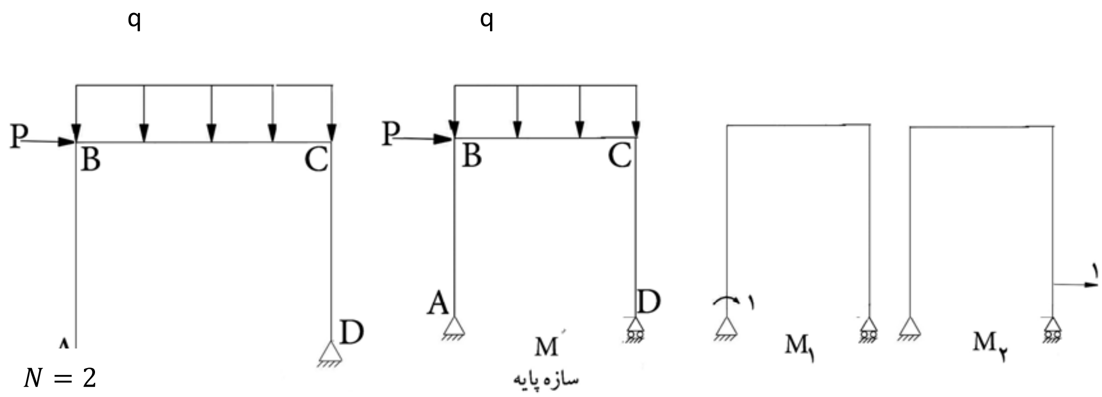
Δ_i: تغییر مکان / دوران محل قید رها شده ی i در سازه ی نخستین.

به طور معمول، تغییر مکان های محل قیدهای رها شده در سازه ی نخستین $\{\Delta\}_{n\times1}$ ، صفراند، مگر زمانی که در سازه و در محل قید رها شده ، نشست تکیه گاهی یا خطا در نصب و مشابه آن وجود داشته باشد.

اکنون با حل دستگاه معادله های (1)، بردار مجهول های x حساب می شوند.

با داشتن کمیت های x (نیروها در محل قیدهای رها شده در سازه ی نخستین) می توان دیگر نیروهای مجهول را از معادله های تعادل حساب کرد.

به عنوان نمونه، فرآیند روش نرمی برای قاب 2 درجه نامعین شکل زیر که تنها اثرهای خمشی در آن وجود دارد، به صورت زیر اجرا می شود:



$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \cdots \\ x_2 = \cdots \end{cases} \quad \begin{matrix} = \theta'_A + \delta_{11}X_1 + \delta_{21}X_2 \\ 0 = \Delta'_D + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 \end{matrix}$$

x_1: لنگر نقطه A

x_2: نیروی افقی در D

δ_{11}: دوران نقطه ی A دراثر اعمال لنگریکه در نقطه A .

δ_{21}: دوران نقطه ی D دراثر اعمال لنگریکه در نقطه A .

δ_{12}: دوران نقطه ی A دراثر اعمال باریکه در نقطه D .

δ_{22}: دوران نقطه ی D دراثر اعمال باریکه در نقطه D .

$$\acute{\theta}_A = \int \frac{M^{\prime} \times M_1}{EI} dx$$

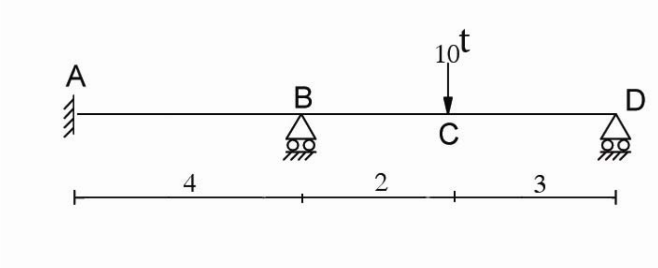
$$\acute{\Delta}_D = \int \frac{M^{\prime} \times M_2}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \int \frac{M_1^2}{EI} dx$$

$$\delta_{12} = \partial_{21} = \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2 M_2}{EI} dx = \int \frac{M_2^2}{EI} dx$$

مثال: نمودار لنگر تیر شکل زیر را با در نظر گرفتن اثرهای خمش به تنهایی رسم کنید.



10t
A
B
C
D
4
2
3

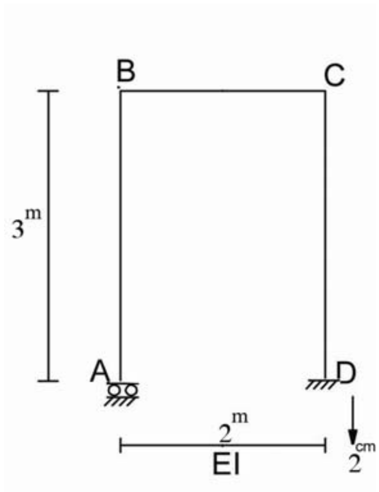
با روش نرمی می توان سازه های نامعین که دارای نشست تکیه گاهی، خطا در نصب و مانند اینها باشند را تحلیل کرد.

در صورت وجود نشست تکیه گاهی یا خطا در نصب، لازم است قید های آزاد شده در محل هایی انتخاب شوند که دارای نشست تکیه گاهی یا خطا در نصب باشند.

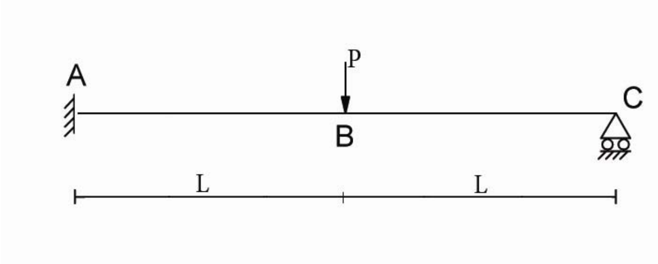
به عبارت دیگر، چنانچه یکی از تکیه گاههای سازه دارای نشست باشد، لازم است یکی از قیدهای رها شده، تکیه گاه دارای نشست باشد.

در این صورت تغییر مکان قید رها شده در سازه ی نخستین، برابر مقدار نشست قرار داده می شود.

مثال: نمودار لنگر قاب شکل زیر را با فرض نشستی به اندازه ی 2^{cm} به سمت پایین رسم کنید.



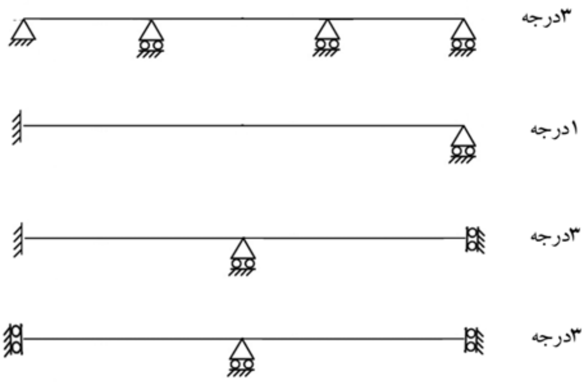
مثال: نمودار لنگر تیر شکل زیر را با آزاد سازی یک قید دوران داخلی رسم کنید. (تنها اثر خمش را مؤثر بدانید). راهنمایی: دوران گره B را آزاد کنید.



روش قضیه ۳ لنگر:

این روش برای تحلیل تیرهای نامعین خمشی به کار می رود. در این شیوه تنها اثر خمش در نظر گرفته می شود. نخست درجه ی نامعینی خمشی یک تیر سرتاسری تعیین می گردد.

درجه ی نامعینی هر تیر سرتاسری، برابر است با تعداد لنگرهای مجهول تکیه گاهی آن تیر



در هر تیر سرتاسری به تعداد درجه های نامعینی خمشی آن می توان از قضیه ی ۳ لنگر استفاده کرد. فرض ها و محدودیت های قضیه ی ۳ لنگر به صورت زیر می باشد:

۱- قضیه ی ۳ لنگر در دورهانه ی پیاپی از تیر سرتاسری به کار می رود.

۲- دامنه ی کاربرد قضیه ی ۳ لنگر (دو دهانه ی پیاپی از تیر سرتاسری) باید پیوسته ی خمشی (بدون مفصل) باشد. به عبارت دیگر قضیه ی ۳ لنگر در دو دهانه ی پیاپی، فاقد مفصل به کار می رود.

۳- در قضیه ی ۳ لنگر می توان اثر نشست های تکیه گاهی را در نظر گرفت.

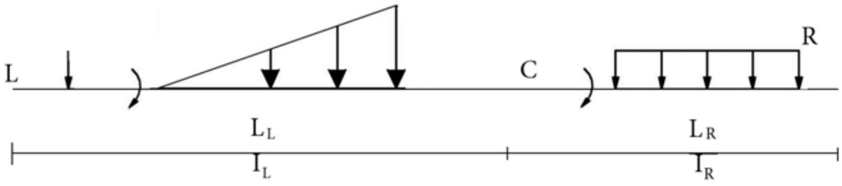
٤- در این قضیه، تنها اثر خمش در نظر گرفته می شود.

٥- تکیه گاه میانی در دو دهانه ی پیاپی نمی تواند دارای لنگر متمرکز باشد.

رابطه ی روش قضیه ی ۳ لنگر با استفاده از قضیه های لنگر سطح بدست می آید.

این رابطه، شکل زیر را خواهد داشت.

$$\frac{M_l L_l}{I_l} + 2M_c\left(\frac{L_l}{I_l} + \frac{L_R}{I_R}\right) + \frac{M_R L_R}{I_R} = 6E\left[\frac{-\Delta L}{L_l} + \Delta c\left(\frac{1}{L_l} + \frac{1}{L_R}\right) - \frac{\Delta R}{LR}\right] - 6\frac{S_l \bar{X}_l}{I_l L_l} - 6\frac{S_R \bar{X}_R}{I_R L_R}$$



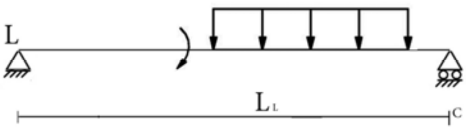
L_R: طول دهانه ی سمت راست. I_R: مکان اینرسی دهانه ی سمت راست.

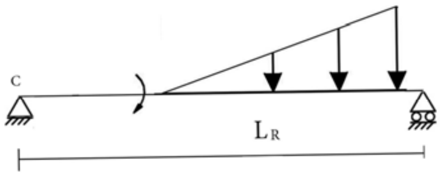
L_L: طول دهانه ی سمت چپ. I_L: مکان اینرسی دهانه ی سمت چپ.

M_L: لنگر تکیه گاه چپ. Δ_L: نشست تکیه گاه چپ.

M_C : لنگر تکیه گاه میانی. Δ_C: نشست تکیه گاه میانه .

M_R: لنگر تکیه گاه راست. Δ_R: نشست تکیه گاه راست.



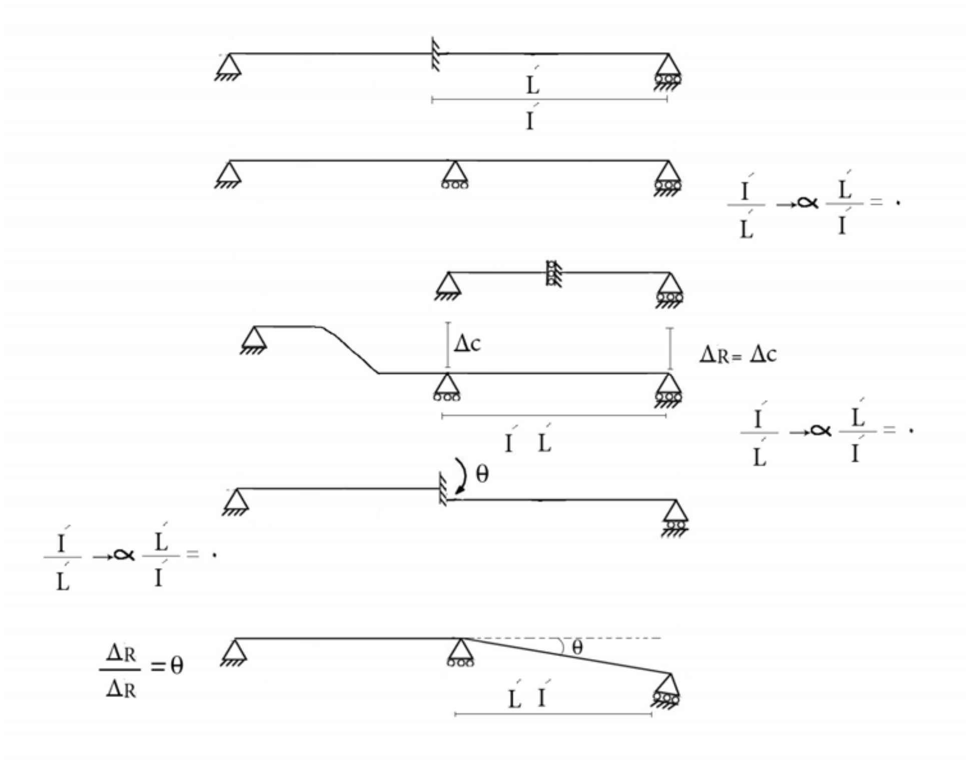


S_L: سطح زیر نمودار لنگر بارهای دهانه ی چپ هنگامی که این بارها بر روی تیر دو سر ساده اعمال شوند.

S_R: سطح زیر نمودار لنگر بارهای دهانه ی راست هنگامی که این بارها بر روی تیر دو سر ساده اعمال شوند.

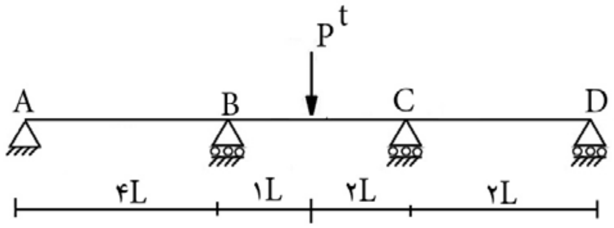
$\overline{X}_L$: فاصله ی مرکز سطوح S_L تا تکیه گاه سمت چپ.

$\overline{X}_R$: فاصله ی مرکز سطوح S_R تا تکیه گاه سمت راست.

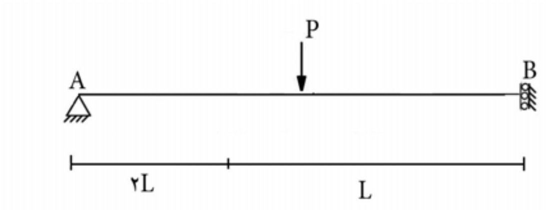


نکته :جهت های قراردادی لنگرها همانند فصل ۲ و نشت به سمت پایین + پنداسته می شود.

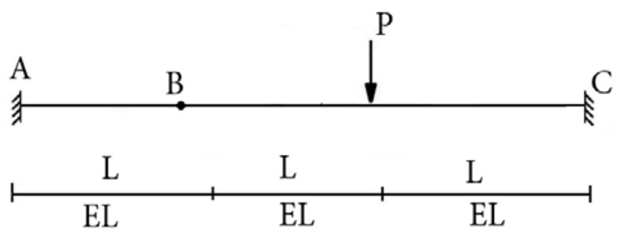
مثال: نمودار لنگر خمشی تیر شکل زیر را حل کنید.


P t
A
B
C
D
۴L
۱L
۲L
۲L

مثال :نمودار لنگر تیر شکل زیر را با استفاده از قضیه سه لنگر رسم کرده و خیز گره B یا تکیه گاه Bرا محاسبه کنید؟



مثال : نمودار لنگر تیر شکل زیر را با روش سه لنگر رسم کنید.



روش شیب و افت:

از این روش برای تحلیل تیرها و قاب ها استفاده می شود. در این شیوه تنها اثرهای خمش و برش در تحلیل تیر و قاب وارد می گردد و از اثر نیروی محوری صرف نظر می گردد.

روش شیب و افت بر پایه ی محاسبه ی دوران ها و تغییر مکان های نسبی گره های عضوهای سازه استوار است. به عبارت دیگر، در روش شیب و افت، دوران هر گره سازه و نیز مکان نسبی آن گره نسبت به گره دیگر در راستای عمود بر محور عضو به عنوان مجهول می باشد.

معادله های روش شیب و افت نیز از رابطه های تعادل نیرویی گرهی و عضوی سازه بدست می آیند. به عبارت دیگر، در روش شیب و افت، تعادل لنگرهای هر گره سازه در نظر گرفته می شود.

برای انجام این کار، نخست لنگرهای دو انتهای هر عضو به صورت تابعی از دوران های گرهی و تغییر مکان دو انتهای عضو نسبت به یکدیگر از رابطه های زیر حساب می شوند.

$$M_i = \frac{2EI}{L_{ij}}\left(2\theta_i + \theta_j - \frac{3\Delta_{ij}}{L_{ij}}\right)$$

$$M_j = \frac{2EI}{L_{ij}}\left(\theta_i + 2\theta_j - \frac{3\Delta_{ij}}{L_{ij}}\right)$$

در این رابطه ها، θ ، دوران گره در راستای پاد ساعتگرد مثبت در نظر گرفته می شود.

و Δ_{ij} ، تغییر مکان نسبی گره j نسبت به گره i در راستای عمود بر محور عضو می باشد.

رابطه های پیشین با فرض عدم وجود بارگذاری میانی در عضو ij می باشد. چنانچه عضو ij دارای بارگذاری میانی باشد، آنگاه اثر این بارهای میانی به صورت لنگر گیرداری در معادله ها وارد می شوند. در این صورت رابطه های لنگر عضو، به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{cases} M_i = \dfrac{2EI}{L_{ij}}\left(2\theta_i + \theta_j - \dfrac{3\Delta_{ij}}{L_{ij}}\right) + FEM_{ij} \\ M_j = \dfrac{2EI}{L_{ij}}\left(\theta_i + 2\theta_j - \dfrac{3\Delta_{ij}}{L_{ij}}\right) + FEM_{ij} \end{cases}$$

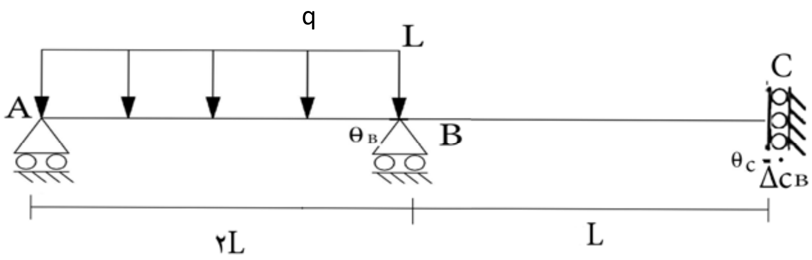
FEM :لنگر گیرداری

پس از نوشتن لنگرهای گرهی عضوهای سازه بر حسب تابعی از دوران ها و تغییر مکان های نسبی گره های عضو، اکنون از رابطه های تعادل لنگرهای گره های سازه و نیز رابطه های تعادل کل عضو، استفاده می شود و تعدادی معادله برای محاسبه ی مجهول بدست می آیند.

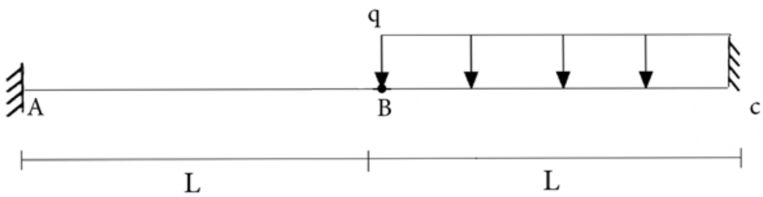
با حل همزمان این معادله ها، دوران ها و تغییر مکان های نسبی گره های عضو حساب می شوند.

این روش، در سازه های نامعین ساده تر انجام می شود، زیرا دوران ها و تغییر مکان های سازه های نامعین ، به دلیل قیدهای اضافی کم می باشد.

مثال :نمودار لنگر شکل زیر را رسم کنید. (با روش شیب و افت)


q
L
A
B
C
θ B
θ C
ΔCB
٢L
L

مثال : نمودار لنگر تیر شکل زیر را با روش شیب و افت رسم کنید.



مثال : نمودار لنگر تیر شکل زیر را با روش شیب و افت رسم کنید.